Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh ( Hoàn thành 28-5-2016)

# PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH

## KĨ NĂNG TÌM BIỂU THỨC LIÊN HỢP HOẶC NHÂN TỬ

## CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

*Vũ Hồng Phong GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*

**BẢN CHÍNH THỨC**

**Lưu ý trước khi sử dụng tài liệu**

**+Bài viết gồm 5 chuyên đề: Chuyên đề 1 là các phương trình không dùng Casio .Chuyên đề 2 và 3 là các thí dụ dùng máy tính Casio có hướng dẫn sơ lược, chuyên đề 4 và 5 là lí thuyết hướng dẫn chi tiết cách dùng máy tính Caiso tìm biểu thức liên hợp hoặc tìm nhân tử cần xuất hiện trong phương trình của chuyên đề 2 và 3. Trong đó có chuyên đề phụ một cách tạo ra một phương trình tích từ các biểu thức phù hợp**

**+Do có nhiều phương trình mới lạ và phức tạp nên bài viết không là tài liệu để ôn tập cho các kì thi**

**+Các PT trong bài viết có nghiệm là nghiệm của PT bậc 3,bậc 4 nên nó phức tạp hơn các dạng PT khác**

**+Các phương trình chưa được sắp xếp thành hệ thống hợp lí và có thể có sai sót**

**+Tài liệu cung cấp một số ý tưởng để tạo ra các phương trình vô tỷ đưa về dạng tích**

## Chuyên đề 1. **PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ KHÔNG DÙNG CASIO HỖ TRỢ**

Chuyên đề này gồm các PT có nghiệm đẹp ta hoàn toàn nhẩm được. Dù vất vả trong việc nhẩm và tính toán nhưng giúp chúng ta tiến bộ khi học môn Toán.

## A.Các Phương trình tìm biểu thức liên hợp không dùng Casio

Một số ví dụ ngoài cách nhân liên hợp có thể làm theo hướng đưa về tích hoặc tìm tổng và hiệu các căn rồi tìm từng căn theo x.

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=2x^2+2x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$PT \Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$a)\dfrac{1}{\sqrt{6x+2\sqrt{x}+1}-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2x+\sqrt{x}+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$

$b)\dfrac{2}{\sqrt{6x+2\sqrt{x}+1}-\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{2x+\sqrt{x}+1}-\sqrt{x}}=\dfrac{5x+7}{x^2+3x+2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=1$ **(lưu ý coi** $t=\sqrt{x}=-3$ **là nghiệm ngoại lai)**

$c)\sqrt{6x^2+2x+1}=\dfrac{6x^4+8x^3+x^3+x^2-x-2}{5x^2+x-2}$

**Hướng dẫn.**

$pt \Leftrightarrow (6x^2+2x-1+\sqrt{6x^2+2x+1})(x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1})=0$

**PTcó 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3; x=\dfrac{-1}{3}$

$d)\left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x\right)^3+\left(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x\right)^3=9$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

$e)\left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2\right)^3+\left(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x\right)^3=2x^3+3x^2+3x+1$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

$f)\dfrac{2x+2}{x^2+x+2}+|x+1|\sqrt{\dfrac{2x^2-2x+1}{2x^2+x+1}}=2$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow |x+1|\sqrt{\frac{2x^2-2x+1}{2x^2+x+1}} = \frac{2(x^2+1)}{x^2+x+2} \Leftrightarrow \frac{|x+1|\sqrt{2x^2-2x+1}}{2\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{x^2+1}{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(|x+1|\sqrt{2x^2-2x+1} - x^2 - 1\right)(x^2+x+2) + \left(x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}\right)(x^2+1) = 0$$

**Nhân liên hợp suy ra PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Chú ý: biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+1-|x+1|\sqrt{2x^2-2x+1}$

$$h)\ \frac{2x}{x^2+x+2} + \sqrt{\frac{2x^4+2x^3+x^2+4}{2x^2+x+1}} = 2$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^4+2x^3+x^2+4}}{2\sqrt{2x^2+x+1}} = \frac{x^2+2}{x^2+x+2}$$

**Biến đổi tương tự bài trước và nhân liên hợp suy ra PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

$$k)\ \sqrt{\frac{6x^2+2x+1}{x^2+2x+6}} = \frac{x^2+x+1}{3}$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{6x^2+2x+1} - x^2 - x - 1\right) + \left(3 - \sqrt{x^2+2x+6}\right)(x^2+x+1) = 0$$

**nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=1; x=-3$

$$p)\ \sqrt{\frac{2x^2+10x+13}{6x^2+2x+1}} = \frac{x+4}{x^2+x+4}$$

**Hướng dẫn.** **Nhận thấy** $x \geq -4$

$$PT \Leftrightarrow (x^2+x+4)\left(\sqrt{2x^2+10x+13} - x - 4\right) + \left(x^2+x+1-\sqrt{x^2+2x+6}\right)(x+4) = 0$$

**nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=1; x=-3$

$q)\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}=\dfrac{8x^2+2x}{3x^2+3x+4}$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}=\dfrac{2(\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1})(\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1})}{3x^2+3x+4}$

$PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+x+1}=0\\ 2\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=3x^2+3x+4(*)\end{array}\right.$

**Giải (*):Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3; x=-\dfrac{1}{4}$

$s)\sqrt{2\sqrt{2x^2+x+1}+3x+2}+\sqrt{\sqrt{6x^2+2x+1}+x}=2x+3(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{2\sqrt{2x^2+x+1}+3x+2}-(ax+b)$

**Do** $0;1$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}b=2\\ a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{2\sqrt{2x^2+x+1}+3x+2}-(x+2)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{6x^2+2x+1}+x}-(x+1)$

**Do** $VT(*)\ge 0$ **suy ra** $x\ge\dfrac{-3}{2}$

**Xét** $-1\ge x\ge\dfrac{-3}{2}$ **có:** $\sqrt{\sqrt{6x^2+2x+1}+x}=\sqrt{\sqrt{4x^2+2x^2+2x+1}+x}$

$>\sqrt{\sqrt{4x^2}+x}=\sqrt{2|x|+x}\ge\sqrt{|x|}\ge 1$

**suy ra** $VT(*)>1$

**Do** $-1 \ge x \ge \frac{-3}{2}$ **suy ra** $VP(*) = 2x+3 \le 1$

**Vì vậy PT(*) có nghiệm** $x > -1$ **Khi đó** $\sqrt{\sqrt{6x^2+2x+1}+x}+(x+1) > 0$

$\sqrt{2\sqrt{2x^2+x+1}+3x+2}+(x+2) > 0$

$$PT(*) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2x^2+x+1}-(x^2+x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{6x^2+2x+1}-(x^2+x+1)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=0; x=1$

$$t) 2\sqrt{6x^2+2x+1}-3\sqrt{2x^2+x+1}=\frac{12x^2-2x-10}{7x^2+7x+10}$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{6x^2+2x+1}-3\sqrt{2x^2+x+1}$$
$$=\frac{2(2\sqrt{6x^2+2x+1}-3\sqrt{2x^2+x+1})(2\sqrt{6x^2+2x+1}-3\sqrt{2x^2+x+1})}{7x^2+7x+10}$$

$$PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{6x^2+2x+1}-3\sqrt{2x^2+x+1}=0 \\ 4\sqrt{6x^2+2x+1}+6\sqrt{2x^2+x+1}=7x^2+7x+10(*) \end{array}\right.$$

**Giải (*):Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3; x=-\frac{5}{6}$

***Một cách tạo ra phương trình từ 2 biểu thức liên hợp**

**Dạng PT:** $\frac{\sqrt{A}}{b}=\frac{a}{\sqrt{B}}$ **hay** $\frac{\sqrt{A}}{a}=\frac{b}{\sqrt{B}}$

**Cách giải.**

$$\frac{\sqrt{A}}{a}=\frac{b}{\sqrt{B}} \Leftrightarrow \sqrt{B}(\sqrt{A}-a)+a(\sqrt{B}-b)=0$$

**Nhân liên hợp ta sẽ giải quyết được PT đã cho**

**Thí dụ minh họa Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^2+x+2}=\frac{x^2+x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{6x^2+2x+1}\left(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-2x-2\right)+\left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x-1\right)(x^2+x+2)=0$$

**Nhân liên hợp PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$3\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=4x^2+4x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$PT \Leftrightarrow 3[x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}]+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$4\sqrt{2x^2+x+1}+\frac{2x^2+2x+1}{2x+\sqrt{6x^2+2x+1}}=3x^2+x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta có** $\sqrt{6x^2+2x+1}=\sqrt{4x^2+x^2+(x+1)^2}>\sqrt{4x^2}=2|x|\geq -2x$

**nên đkxđ:** $x \in R$

$$pt \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2+x+1}+\frac{\left(\sqrt{6x^2+2x+1}\right)^2-(2x)^2}{2x+\sqrt{6x^2+2x+1}}=3x^2+x+5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+2x+1}+4\sqrt{2x^2+x+1}=3x^2+3x+5$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$PT \Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}+2[x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}]=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 4** **Giải phương trình**

$$2\sqrt{2x^2+x+1}+\frac{15x^2}{x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}=4x^2+x+2$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x+1}+3.\frac{\left(\sqrt{6x^2+2x+1}\right)^2-(x+1)^2}{x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}=4x^2+x+2$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=4x^2+4x+5$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$PT \Leftrightarrow 3[x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}]+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 5** **Giải phương trình**

$$\frac{6x^2+6x+6}{\sqrt{2x^2+x+1}-x}+\frac{5x^2+2x+1}{\sqrt{6x^2+2x+1}+x}=4x^2+9x+7$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 3.\frac{\left(2\sqrt{2x^2+x+1}\right)^2-(2x)^2}{2\sqrt{2x^2+x+1}-2x}+\frac{\left(\sqrt{6x^2+2x+1}\right)^2-(x)^2}{x+\sqrt{6x^2+2x+1}}=4x^2+9x+7$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=4x^2+4x+5$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$PT \Leftrightarrow 3[x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}]+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 6** **Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2-8x+4}+\sqrt{7x^2-12x+9}=3x^2-6x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

$$PT \Leftrightarrow 2(x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4})+x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Nâng cấp:** **Giải phương trình**

$$a)\frac{1}{\sqrt{5x-8\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{7x-12\sqrt{x}+9}+2\sqrt{x}}=\frac{2x+5}{x^2+3x+2}$$

$$b)\frac{1}{\sqrt{5x-8\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{7x-12\sqrt{x}+9}+2\sqrt{x}}=\frac{3x+7}{x^2+3x+2}$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0;\ x=1; x=9$

c) $$\frac{\sqrt{5x^2-8x+4}}{x^2-2x+2}=\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{7x^2-12x+9}}$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{7x^2-12x+9}\left(\sqrt{5x^2-8x+4}-x^2+2x-2\right)+\left(\sqrt{7x^2-12x+9}-x^2+2x-3\right)(x^2-2x+2)=0$$

**Nhân liên hợp PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

$d)2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{7x^2-12x+9}=\frac{13x^2-20x+7}{3x^2-6x+7}$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{7x^2-12x+9}$$
$$=\frac{(2\sqrt{5x^2-8x+9}-\sqrt{7x^2-12x+9})(2\sqrt{5x^2-8x+9}-\sqrt{7x^2-12x+9})}{3x^2-6x+7}$$
$$PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{7x^2-12x+9}=0 \\ 2\sqrt{5x^2-8x+4}+\sqrt{7x^2-12x+9}=0 \end{array}\right.$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=3; x=\frac{7}{13}$

$e)\sqrt{\sqrt{5x^2-8x+4}+4x-1}+\sqrt{\sqrt{7x^2-12x+9}+6x+1}=2x+3(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{5x^2-8x+4}+4x-1}-(ax+b)$

**Do** $0;1;3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} b=1 \\ a+b=1 \\ 3a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{5x^2-8x+4}+4x-1}-(x+1)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{7x^2-12x+9}+6x+1}-(x+2)$

**ĐKXĐ:** $\sqrt{5x^2-8x+4}+4x-1\geq 0(1)$ **và** $\sqrt{7x^2-12x+9}+6x+1\geq 0(2)$

**Có:** $(1)\Leftrightarrow x\geq \frac{-3}{\sqrt{11}}$ $(2)\Leftrightarrow x\geq \frac{-12-2\sqrt{94}}{29}$ **suy ra** $x\geq \frac{-3}{\sqrt{11}}$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{5x^2-8x+4}+4x-1}+(x+1)>0$

$\sqrt{\sqrt{7x^2-12x+9}+6x+1}+(x+2)>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-8x+8}-(x^2-2x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{7x^2-12x+9}-(x^2-2x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 7 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-8x+4}+\frac{x^2-8x}{2x+3+\sqrt{7x^2-12x+9}}=\frac{4x^2-10x+6}{3}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-8x+4}+\frac{(\sqrt{7x^2-12x+9}+2x+3)(\sqrt{7x^2-12x+9}-2x-3)}{3(2x+3+\sqrt{7x^2-12x+9})}=\frac{4x^2-10x+6}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-8x+4}+\frac{\sqrt{7x^2-12x+9}-2x-3}{3}=\frac{4x^2-10x+6}{3}$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

$$PT\Leftrightarrow 3(x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4})+x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 8 Giải phương trình**

$$\frac{x^2-12x+3}{\sqrt{5x^2-8x+4}-2x-1}+\frac{x^2-8x}{2x+3+\sqrt{7x^2-12x+9}}=\frac{4x^2-4x+9}{3}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{5x^2-8x+4}-2x-1)(\sqrt{5x^2-8x+4}+2x+1)}{\sqrt{5x^2-8x+4}-2x-1}$$
$$+\frac{(\sqrt{7x^2-12x+9}+2x+3)(\sqrt{7x^2-12x+9}-2x-3)}{3(2x+3+\sqrt{7x^2-12x+9})}=\frac{4x^2-4x+9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-8x+4}+2x+1+\frac{\sqrt{7x^2-12x+9}-2x-3}{3}=\frac{4x^2-4x+9}{3}$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

$$PT \Leftrightarrow 3(x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4})+x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 9 Giải phương trình**

$$\sqrt{14x^2-6x-4}+\sqrt{18x^2-10x+8}=2x^2-2x+6$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm 1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=4 \\ 4a-2a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$PT\Leftrightarrow x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}+x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-2;x=\pm1;x=4$

**Nâng cấp:** $\dfrac{\sqrt{14x^2-6x-4}}{x^2-x+2}=\dfrac{x^2-x+4}{\sqrt{18x^2-10x+8}}$

$$PT\Leftrightarrow \sqrt{18x^2-10x+8}\left(\sqrt{14x^2-6x-4}-x^2+x-2\right)+\left(\sqrt{18x^2-10x+8}-x^2+x-4\right)(x^2-x+2)=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-2;x=\pm1;x=4$

**Thí dụ 10 Giải phương trình**

$$2\sqrt{14x^2-6x-4}+\frac{2x^2-18x+7}{4x+1+\sqrt{18x^2-10x+8}}=3x^2-7x+7$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow 2\sqrt{14x^2-6x-4}+\frac{(\sqrt{18x^2-10x+8}+4x+1)(\sqrt{18x^2-10x+8}-4x-1)}{4x+1+\sqrt{18x^2-10x+8}}=3x^2-7x+7$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}a+b+c=2\\a-b+c=4\\4a-2a+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$PT\Leftrightarrow 2[x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}]+x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1;x=\pm2;x=3$

**Thí dụ 11** **Giải phương trình**

$$3\sqrt{14x^2-6x-4}+\sqrt{18x^2-10x+8}=4x^2-4x+10$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}a+b+c=2\\a-b+c=4\\4a-2a+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$PT\Leftrightarrow 3[x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}]+x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-2;x=\pm1;x=4$

**Thí dụ 12** **Giải phương trình**

$$\frac{5x^2-12x-5}{3x+1+\sqrt{14x^2-6x-4}}+\frac{4x^2-4x+14}{\sqrt{18x^2-10x+8}-4x+1}=3x^2+2x+7$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{14x^2-6x-4}-3x-1)(\sqrt{14x^2-6x-4}+3x+1)}{3x+1+\sqrt{14x^2-6x-4}}$$
$$+2.\frac{(\sqrt{18x^2-10x+8}-4x+1)(\sqrt{18x^2-10x+8}+4x-1)}{\sqrt{18x^2-10x+8}-4x+1}=3x^2+2x+7$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}a+b+c=2\\a-b+c=4\\4a-2a+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$PT \Leftrightarrow x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}+2[x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}]=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=\pm 2; x=3$

**Thí dụ 13 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-28x+21}+\sqrt{13x^2-32x+28}=2x^2-4x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $1;\pm 2;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{11x^2-28x+21}$

**Do** $1;\pm 2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 4a-2a+c=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{11x^2-28x+21}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+4-\sqrt{13x^2-32x+28}$

$$PT \Leftrightarrow x^2-2x+3-\sqrt{11x^2-28x+21}+x^2-2x+4-\sqrt{13x^2-32x+28}=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=\pm 2; x=3$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$a)\frac{1}{\sqrt{11x-28\sqrt{x}+21}+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{13x-32\sqrt{x}+28}+2\sqrt{x}}=\frac{2x+7}{x^2+7x+12}$$

$$a)\frac{1}{\sqrt{5x-8\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{7x-12\sqrt{x}+9}+2\sqrt{x}}=\frac{3x+10}{x^2+7x+12}$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1;\ x=4; x=9$

**Thí dụ 14 Giải phương trình**

$$2\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{10x^2+14x+13}=2x^2+2x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;\pm 2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$

**và** $x^2+x+3-\sqrt{10x^2+14x+13}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-1; x=\pm 2$

**Thí dụ 15 Giải phương trình**

$$2\sqrt{2x^2+3x+2}+3\sqrt{10x^2+14x+13}=4x^2+4x+11$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;\pm 2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$

**và** $x^2+x+3-\sqrt{10x^2+14x+13}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-1; x=\pm 2$

**Thí dụ 16 Giải phương trình**

$$4\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{10x^2+14x+13}=3x^2+3x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;\pm 2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$ **và** $x^2+x+4-\sqrt{10x^2+14x+13}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-1; x=\pm 2$

**Thí dụ 17 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=\frac{5x^2-2x+2}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;\dfrac{1}{2}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2-x+1-|x|\sqrt{4x^2-6x+6}$ **và** $3x^2-x+1-|x|\sqrt{9x^2-8x+8}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=\pm 1; x=\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 18 Giải phương trình**

$$3\sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=\frac{9x^2-4x+4}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;\dfrac{1}{2}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2-x+1-|x|\sqrt{4x^2-6x+6}$ **và** $3x^2-x+1-|x|\sqrt{9x^2-8x+8}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=\pm 1; x=\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 19 Giải phương trình**

$$2\sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=\frac{7x^2-3x+3}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;\dfrac{1}{2}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2-x+1-|x|\sqrt{4x^2-6x+6}$ **và** $3x^2-x+1-|x|\sqrt{9x^2-8x+8}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=\pm 1; x=\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 20 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=5x+\frac{2}{x}-2$$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=\dfrac{5x^2-2x+2}{x}$

**Do** $5x^2-2x+2>0$ **nên** $x>0$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-6x^3+6x^2}+\sqrt{9x^4-8x^3+8x^2}=5x^2-2x+2$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp (kể cả nghiệm âm) của PT là** $\pm 1;\dfrac{1}{2}$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{4x^4-6x^3+6x^2}$

**và** $3x^2-2x+1-\sqrt{9x^4-8x^3+8x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 21 Giải phương trình**

$2\sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=7x+\dfrac{3}{x}-3$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-6x+6}+\sqrt{9x^2-8x+8}=\dfrac{7x^2-3x+3}{x}$

**Do** $7x^2-3x+3>0$ **nên** $x>0$

$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4-6x^3+6x^2}+\sqrt{9x^4-8x^3+8x^2}=7x^2-3x+3$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp (kể cả nghiệm âm) của PT là** $\pm 1;\dfrac{1}{2}$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{4x^4-6x^3+6x^2}$ **và** $3x^2-2x+1-\sqrt{9x^4-8x^3+8x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 22 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^2-5x+10}+\sqrt{x^2-3x+6}=\frac{3x^2-2x+4}{x}$$

**Hướng dẫn.**

**Do** $3x^2-2x+4>0$ **nên** $x>0$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}+\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}=3x^2-2x+4$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp (kể cả nghiệm âm) của PT là** $1;\pm2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1\,;x=2$

**Thí dụ 23 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^2-5x+10}+3\sqrt{x^2-3x+6}=\frac{5x^2-4x+8}{x}$$

**Hướng dẫn.**

**Do** $3x^2-2x+4>0$ **nên** $x>0$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}+3\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}=5x^2-4x+8$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp (kể cả nghiệm âm) của PT là** $1;\pm2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1\,;x=2$

**Thí dụ 24 Giải phương trình**

$$2\sqrt{4x^4+2x^3+1}-\sqrt{4x^4-2x^3+10x^2+1}=2x^2+3x+1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-2;0;\frac{-1}{2}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{4x^4+2x^3+1}$ **và**

$2x^2-x+1-\sqrt{4x^4-2x^3+10x^2+1}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-2; x=0; x=\frac{-1}{2}$

**Thí dụ 25 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^4+9x^2+6x}+\sqrt{16x^4+49x^2+16x}=5x^2+2x+6$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{x^4+9x^2+6x}$ **và** $4x^2+x+4-\sqrt{16x^4+49x^2+16x}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=\pm 1; x=2$

**Thí dụ 26 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^4+21x^2+24x}+2\sqrt{x^4+16x^2+32x}=4x^2+5x+12$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 2;1$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2+x+4-\sqrt{4x^4+21x^2+24x}$ **và**
$2x^2+4x+8-2\sqrt{x^4+16x^2+32x}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=\pm 2; x=1$

**Thí dụ 27 Giải phương trình**

$$\sqrt{x(4x^2+13x+8)}+\sqrt{2x(x^2+5x+2)}=2x^2+3x+4$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 2;\pm 1$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{x(4x^2+13x+8)}$ **và** $x^2+2x+2-\sqrt{2x(x^2+5x+2)}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\pm 2; x=\pm 1$

**Thí dụ 28 Giải phương trình**

$\sqrt{x^4 - x^3 + 4} + \sqrt{x^3 - 5x^2 + 4x + 1} = x^2 - x + 3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;4$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2 - x + 2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$ **và** $1 - \sqrt{x^3 - 5x^2 + 4x + 1}$

**PTcó 3 nghiệm** $x = 0; x = 1; x = 4$

☺**Thí dụ 29** **Giải phương trình**

$\sqrt{x^4 - x^3 + 4} + \sqrt{x^3 + 4x} = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x + 2$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;4$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2 - x + 2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$ **và** $\sqrt{5}x - \sqrt{x^3 + 4x}$

**PTcó 3 nghiệm** $x = 0; x = 1; x = 4$

☺**Thí dụ 30** **Giải phương trình**

$\sqrt{x^4 - x^3 + 4} + \sqrt{x^3 + 14x + 5} = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x + 2 + \sqrt{5}$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;4$

**Với** $x \le -1$ **thì** $x^3 + 14x + 5 \le -1 - 14 + 5 = -10 < 0$ **.**

**Do đó nghiệm PT phải thỏa mãn** $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2 - x + 2 - \sqrt{x^4 - x^3 + 4}$ **và** $\sqrt{5}(x+1) - \sqrt{x^3 + 14x + 5}$

**PTcó 3 nghiệm** $x = 0; x = 1; x = 4$

**Thí dụ 31 Giải phương trình**

$\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{(2x+4)(x^2+1)} = x^2 + x - 1$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{(2x+4)(x^2+1)}-x^2-x+1$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0,-1$

$$f'(x)=\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}-\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{2x^3+4x^2+2x+4}}-2x-1$$

**Ta có** $f'(-1)=0$ **nên PT có nghiệm bội** $x=-1$ **(tính** $f''(-1)\neq 0$ **Pt có nghiệm kép** $x=-1$**)**

**Các ví dụ kiểm tra chính xác là nghiệm kép xin dành cho bạn đọc)**

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{x^4-x^2+1}$

**Lấy đạo hàm được biêu thức** $P(x)=2ax+b-\dfrac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$

**Do** $-1;0$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}a-b+c=1\\c=1\end{cases}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\end{cases}$

**Do PT có nghiệm kép** $x=-1$ **nên nó là nghiệm của P(x)**

**suy ra** $-2a+b+1=0(**)$

**Từ (*) và (**) suy ra** $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{x^4-x^2+1}$

**Tương tự** $\sqrt{(2x+4)(x^2+1)}-1$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;x=-1$

☺**Thí dụ 32 Giải phương trình**

$(x+1)\sqrt{4x^2+x+4}+\sqrt{2x^3+6x+1}=2x^2+4x+3$

**Hướng dẫn.**

**Nếu** $x\leq -1$ **thì** $2x^3+6x+1\leq -2-6+1=-7<0$

**Suy ra** $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=1$ **và dùng đạo hàm thấy** $x=1$ **là nghiệm kép**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+2x+2-(x+1)\sqrt{4x^2+x+4}$ **và** $2x+1-\sqrt{2x^3+6x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0; x=1$

😊**Thí dụ 33** **Giải phương trình**

$(x+1)\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^3+6x+1}=x^2+2x+2$

**Hướng dẫn.**

**Nếu** $x \le -1$ **thì** $2x^3+6x+1 \le -2-6+1=-7<0$

**Suy ra** $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=1$

**và dùng đạo hàm thấy** $x=1$ **là nghiệm kép**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-(x+1)\sqrt{x^2-x+1}$ **và** $2x+1-\sqrt{2x^3+6x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0; x=1$

😊**Thí dụ 34** **Giải phương trình**

$|x+1|\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}=3x^2+2$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=1$ **và đều là nghiệm kép**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-|x+1|\sqrt{3x^2+1}$ **và** $x^2-x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0; x=1$

😊**Thí dụ 35** **Giải phương trình**

$x\sqrt{x^2+9x-6}+\sqrt{3x^3-2x^2}=x^2+6x-4$

**Hướng dẫn.**

**ĐK :** $x \ge \frac{2}{3}$**.Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=2; x=\frac{2}{3}$

**Chú ý:Ta phải tinh ý khi thấy xuất hiện các biểu thức** $9x-6; 3x^3-2x^2; 6x-4$ **để nhẩm nghiệm khó là** $x=\frac{2}{3}$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x-2-x\sqrt{x^2+9x-6}$ **và** $3x-2-\sqrt{3x^3-x^2}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1, x=2; x=\frac{2}{3}$

☺**Thí dụ 36 Giải phương trình**

$\sqrt{x^4+12x+12}+\sqrt[3]{7x^2+28x+29}=x^2+3x+5$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-2; x=-1$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{x^4+12x+12}$ **và** $x+3-\sqrt[3]{7x^2+28x+29}$

**Chú ý** $x+3; \sqrt[3]{7x^2+28x+29}$ **không đồng thời bằng 0.**

**PTcó 3 nghiệm** $x=1, x=-2; x=-1$

☺**Thí dụ 37 Giải phương trình**

$\sqrt{x^4+12x+12}+\sqrt[3]{-2x^2+x+2}=x^2+3x+2$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-2; x=-1$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{x^4+12x+12}$ **và** $x-\sqrt[3]{-2x^2+x+2}$

**Chú ý** $x; \sqrt[3]{-2x^2+x+2}$ **không đồng thời bằng 0.**

**PTcó 3 nghiệm** $x=1, x=-2; x=-1$

☺**Thí dụ 38 Giải phương trình**

$\sqrt{x^4+12x+12}+\sqrt[3]{-8x^2+13x-6}=x^2+3x$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-2; x=-1$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{x^4+12x+12}$ **và** $x-2-\sqrt[3]{-8x^2+13x-6}$

**Chú ý** $x-2;\sqrt[3]{-8x^2+13x-6}$ **không đồng thời bằng 0.**

**PTcó 3 nghiệm** $x=1, x=-2; x=-1$

**PT có 3 nghiệm là** $x=1, x=-2; x=-1$

☺**Thí dụ 39** **Giải phương trình**

$$\sqrt{x^4+36x-12}+\sqrt[3]{x^2+10x-3}=x^2+3x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-4$

**Với** $x=1$ **là nghiệm bội(bài này nghiệm kép)**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{x^4+36x-12}$ **và** $x+1-\sqrt[3]{x^2+10x-3}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1, x=-4$

☺**Thí dụ 40** **Giải phương trình**

$$|x|\sqrt{4x^2-5x+10}+\sqrt[3]{4x^2+7x-3}=2x^2+3$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=2; x=-2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-|x|\sqrt{4x^2-5x+10}$ **và** $x+1-\sqrt[3]{4x^2+7x-3}$

**Chú ý** $x+1;\sqrt[3]{4x^2+7x-3}$ **không đồng thời bằng 0.**

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=2; x=-2$

## PHẦN BỔ XUNG CÁCH TÌM NGHIỆM NGOẠI LAI KIỂU MỚI

☺**Thí dụ 41 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-8x+4}+x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=3x^2+x+2$$

**Hướng dẫn. Điều kiện** $x\geq\frac{1}{3}$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1,x=3$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi nay ta để ý** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)$ **có nhân tử là x**

**Thay x=0 vào PT với qui ước tạm thời** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=0$ **thấy thỏa mãn**

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$ **và** $x^2+x-x\sqrt{6x-2}$

**và** $x^2+2x-x\sqrt{8x+1}$

**Lưu ý:Chỉ cần tìm** $x+1-\sqrt{6x-2}$ **và** $x+2-\sqrt{8x+1}$ **có 2 nghiệm** $x=1,x=3$

**Nghiệm của PT là** $x=1,x=3$

☺**Thí dụ 42 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-8x+4}+x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{3x^2+8x-2}\right)=4x^2+2$$

**Hướng dẫn. Điều kiện** $x\geq\frac{1}{3}$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1,x=3$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi này ta để ý** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{3x^2+8x-2}\right)$ **có nhân tử là x**

**Thay x=0 vào PT với qui ước tạm thời** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=0$ **thấy thỏa mãn**

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**và** $x^2+x-x\sqrt{6x-2}$

**và** $2x^2+x-x\sqrt{3x^2+8x-2}$

**Nghiệm của PT là** $x=1,x=3$

☺**Thí dụ 43 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2-12x+8}-2x+2=(x-2)^2\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}\right)$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-1$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi này ta để ý** $(x-2)^2\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}\right)$

**có nhân tử là** $x-2$

**Thay x=2 vào PT với qui ước tạm thời** $(x-2)^2\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}\right)=0$

**thấy thỏa mãn** $\sqrt{5x^2-12x+8}-2x+2=0$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$ **và** $\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=-1$

☺**Thí dụ 44 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2-12x+8}=(x-2)^2\sqrt{2-x^2}+2x-2$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-1$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi này ta để ý** $(x-2)^2\sqrt{2-x^2}$

**có nhân tử là** $x-2$

**Thay x=2 vào PT với qui ước tạm thời** $(x-2)^2\sqrt{2-x^2}$

**thấy thỏa mãn** $\sqrt{5x^2-12x+8}=2x-2$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$ **và** $\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=-1$

☺**Thí dụ 45 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2-8x+4}+x^2\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=2x^3+4x^2-2x+2$

**Hướng dẫn. Điều kiện** $x\ge\frac{1}{3}$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=3$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi nay ta để ý** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)$ **có nhân tử là x**

**Thay x=0 vào PT với qui ước tạm thời** $x\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=0$ **thấy thỏa mãn**

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$ **và** $x+1-\sqrt{6x-2}$

**và** $x+2-\sqrt{8x+1}$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=3$

😊**Thí dụ 46** **Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-8x+4}+x\left(\sqrt[3]{7x^2+1}+\sqrt[3]{10x^2+9x+8}\right)=3x^2+x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0; x=1, x=3$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$ **và** $x+1-\sqrt[3]{7x^2+1}$

**và** $x+2-\sqrt[3]{10x^2+9x+8}$

**Nghiệm của PT là** $x=0; x=1, x=3$

😊**Thí dụ 47** **Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2-2x+1}+x\left(\sqrt[3]{11x^2+30x+27}+\sqrt[3]{8x^2+15x+8}\right)=3x^2+4x+1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=3; x=-1$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-2x+1}$ **(và** $x+3-\sqrt[3]{11x^2+30x+27}$

**và** $x+2-\sqrt[3]{8x^2+15x+8}$ **tìm với 2 nghiệm** $x=3; x=-1$ **)**

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=3; x=-1$

**Thí dụ 48** **Giải phương trình**

$$\sqrt{7x^2-4x-2}+(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=3x^2+4x+4$$

**Hướng dẫn. Điều kiện** $x \ge \frac{1}{3}$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=3$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi nay ta để ý** $(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)$ **có nhân tử là x+1**

**Thay x=-1 vào PT với qui ước tạm thời** $(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=0$ **thấy thỏa mãn**

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{7x^2-4x-2}$ **và** $x^2+2x+1-(x+1)\sqrt{6x-2}$

**và** $x^2+3x+2-(x+1)\sqrt{8x+1}$

**Lưu ý:Có thể chỉ cần tìm** $x+1-\sqrt{6x-2}$ **và** $x+2-\sqrt{8x+1}$ **có 2 nghiệm** $x=1, x=3$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=3$

**Thí dụ 49 Giải phương trình**

$$\sqrt{7x^2-4x-2}+(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{3x^2+8x-2}\right)=4x^2+4x+3$$

**Hướng dẫn. Điều kiện** $x \ge \frac{1}{3}$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=3$

**Để tìm thêm nghiệm ngoại lai khi nay ta để ý** $(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{3x^2+8x-2}\right)$

**có nhân tử là x+1**

**Thay x=-1 vào PT với qui ước tạm thời** $(x+1)\left(\sqrt{6x-2}+\sqrt{8x+1}\right)=0$ **thấy thỏa mãn**

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{7x^2-4x-2}$ **và** $x^2+2x+1-(x+1)\sqrt{6x-2}$

**và** $2x^2+3x+1-(x+1)\sqrt{3x^2+8x-2}$

**Lưu ý:Chỉ cần tìm** $x+1-\sqrt{6x-2}$ **và** $2x+1-\sqrt{8x+1}$ **có 2 nghiệm** $x=1, x=3$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=3$

**Thí dụ 50 Giải phương trình**

$$(x-2)^2\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{7x^2-10x+1}=x^2-7x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=\pm 2$

**Các biểu thức cần tìm là** $2-\sqrt{x^2+2x+4}$ **và** $x^2-x+1-\sqrt{7x^2-10x+1}$

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=\pm 2$

**Thí dụ 51** **Giải phương trình**

$$5x^2+x-2+2\sqrt{2x^2-x+1}=x^2\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{2x^2-4x+3}\right)$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Các biểu thức cần tìm là** $3x^2-x^2\sqrt{x^2-2x+6}$ **và** $3x^2-x^2\sqrt{2x^2-4x+3}$

$x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-x+1}$

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Thí dụ 52** **Giải phương trình**

$$2x^2+x-2+2\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt[3]{2x^5+3x^4}=x^2(1+\sqrt{2x^2-4x+3})$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-\sqrt[3]{2x^5+3x^4}=x\left(x-\sqrt[3]{2x^2+3x}\right)$ **và** $3x^2-x^2\sqrt{2x^2-4x+3}$

**và** $x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-x+1}$

**Lưu ý: xét x=0 và** $x\neq 0$

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Thí dụ 53** **Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-8x+4}+x.\sqrt[3]{-2x^2+9x-8}=2x^2-4x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=1; x=3$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x-x.\sqrt[3]{-2x^2+9x-8}$ **và** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=1; x=3$

**Thí dụ 54 Giải phương trình**

$$2\sqrt{2x^2-x+1}+x.\sqrt[3]{8x^2+15x+8}=2x^2+x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2+2x-x.\sqrt[3]{8x^2+15x+8}$ **và** $x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-x+1}$

**Nghiệm của PT là** $x=0, x=-1; x=3$

**Thí dụ 55 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-2)\sqrt[3]{8x^2+13x+6}=2x^2-2x-2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-1; x=2$

**Các biểu thức cần tìm là**

$x+2-\sqrt[3]{8x^2+13x+6}$ **và** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$

**Nghiệm của PT là** $x=1, x=-1; x=2$

**Thí dụ 56 Giải phương trình**

$$3\sqrt{5x^2+4x}-(x-1)^2\sqrt{x^2+5x+8}=7x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Các biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+4-3\sqrt{5x^2+4x}$ **nhận nghiệm là** $x=\pm1; x=-4$

**và** $2-\sqrt{x^2+5x+8}$ **nhận nghiệm là** $x=-1; x=-4$

**Nghiệm của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Thí dụ 57 Giải phương trình**

$3\sqrt{5x^2+4x}-(x-1)^2\sqrt{x^2+5x+13}=-x^2+9x+1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Các biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+4-3\sqrt{5x^2+4x}$ **nhận nghiệm là** $x=\pm1; x=-4$

**và** $3-\sqrt{x^2+5x+13}$ **nhận nghiệm là** $x=-1; x=-4$

**Nghiệm của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Thí dụ 58 Giải phương trình**

$3\sqrt{5x^2+4x}-(x-1)^2\sqrt{x^2+5x+5}=x^2+5x+3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Các biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+4-3\sqrt{5x^2+4x}$ **nhận nghiệm là** $x=\pm1; x=-4$

**và** $1-\sqrt{x^2+5x+8}$ **nhận nghiệm là** $x=-1; x=-4$

**Nghiệm của PT là** $x=\pm1; x=-4$

**Thí dụ 59 Giải phương trình**

$\sqrt{x+\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}=2|x+1|$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Suy ra** $\sqrt{x+\sqrt{6x^2+2x+1}}$ **tương ứng với** $\sqrt{x+x^2+x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}$ **tương ứng với** $\sqrt{x-1+x^2+x+2}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{6x^2+2x+1}}-|x+1|+\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}-|x+1|=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 60 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2+7x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt{5x^2+14x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}=5|x+1|$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Suy ra** $\sqrt{3x^2+7x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}$ **tương ứng với** $2|x+1|$

$\sqrt{5x^2+14x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}$ **tương ứng với** $3|x+1|$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+7x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}-2|x+1|+\sqrt{5x^2+14x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}-3|x+1|=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 61 Giải phương trình**

$$\sqrt{8x+5+4\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}=|x+1|+|2x+3|$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Suy ra** $\sqrt{8x+5+4\sqrt{6x^2+2x+1}}$ **tương ứng với** $\sqrt{8x+5+4x^2+4x+4}=\sqrt{(2x+3)^2}=|2x+3|$

$\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}$ **tương ứng với** $\sqrt{x-1+x^2+x+2}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{8x+5+4\sqrt{6x^2+2x+1}}-|2x+3|+\sqrt{x-1+2\sqrt{2x^2+x+1}}-|x+1|=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 62 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^2+33x+21+15\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt{8x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}=3|2x+3|$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Suy ra** $\sqrt{x^2+33x+21+15\sqrt{6x^2+2x+1}}$ **tương ứng với** $2|2x+3|$

$\sqrt{8x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}$ **tương ứng với** $|2x+3|$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{x^2+33x+21+15\sqrt{6x^2+2x+1}}-2|2x+3|+\sqrt{8x+1+8\sqrt{2x^2+x+1}}-|2x+3|$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{\sqrt{5x^2-8x+4}-x^2+2x+6}-2+\sqrt[3]{\sqrt{7x^2-12x+9}-x^2+2x-4}+1=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 63 Giải phương trình**

$\sqrt[3]{x^2+x+28-\sqrt{6x^2+x+1}}+\sqrt[3]{x^2+x-6-2\sqrt{2x^2+x+1}}=1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+x+28-\sqrt{6x^2+x+1}}-3+\sqrt[3]{x^2+x-6-2\sqrt{2x^2+x+1}}+2=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 64 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^2+x+5-\sqrt{6x^2+x+1}}+\sqrt{x^2+x+3-2\sqrt{2x^2+x+1}}=3$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+5-\sqrt{6x^2+x+1}}-2+\sqrt{x^2+x+3-2\sqrt{2x^2+x+1}}-1=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 65 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^2+x+5-\sqrt{6x^2+x+1}}+\sqrt{x^2+x+11-2\sqrt{2x^2+x+1}}=5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$Pt \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+5-\sqrt{6x^2+x+1}}-2+\sqrt{x^2+x+11-2\sqrt{2x^2+x+1}}-3=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 66 Giải phương trình**

$$\left(x^2+x-\sqrt{6x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+x+10-2\sqrt{2x^2+x+1}\right)^3=7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$Pt \Leftrightarrow \left(x^2+x-\sqrt{6x^2+x+1}\right)^3+1+\left(x^2+x+10-2\sqrt{2x^2+x+1}\right)^3-8=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 67 Giải phương trình**

$$\left|3\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2\right|+\left|6\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-1\right|=4x^2+6x+8$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$Pt \Leftrightarrow \sqrt{\left(3\sqrt{6x^2+x+1}-x^2\right)^2}-(2x^2+3x+3)+\sqrt{\left(6\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-1\right)^2}-(2x^2+3x+5)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 68 Giải phương trình**

$$\left|3\sqrt{5x^2-8x+4}-x^2+x\right|+\left|3\sqrt{7x^2-12x+9}-x^2+2\right|=4x^2-11x+17$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

$$Pt \Leftrightarrow \sqrt{\left(3\sqrt{5x^2-8x+4}-x^2+x\right)^2}-(2x^2-5x+6)+\sqrt{\left(3\sqrt{7x^2-12x+9}-x^2+2\right)^2}-(2x^2-6x+11)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 69 Giải phương trình**

$$\left|3\sqrt{14x^2-6x-4}-x^2-1\right|+\left|\sqrt{18x^2-10x+8}+x\right|=3x^2-3x+9$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}a+b+c=2\\a-b+c=4\\4a-2a+c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=2\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$Pt\Leftrightarrow\sqrt{\left(3\sqrt{14x^2-6x-4}-x^2-1\right)^2}-(2x^2-3x+5)+\sqrt{\left(\sqrt{18x^2-10x+8}+x\right)^2}-(x^2+4)=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1;x=\pm2;x=3$

**Thí dụ 70 Giải phương trình**

$$\sqrt[3]{x^3-2+3\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x-1}=x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases}c=1\\a+b+c=3\\9a-3a+c=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3-2+3\sqrt{6x^2+2x+1}}-x-1+\sqrt[3]{2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x-1}-1=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 71 Giải phương trình**

$\sqrt[3]{x^3-2+3\sqrt{6x^2+2x+1}}+\sqrt[3]{2\sqrt{2x^2+x+1}-x^3-x^2-x-2}=1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$**là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3-2+3\sqrt{6x^2+2x+1}}-x-1+\sqrt[3]{2\sqrt{2x^2+x+1}-x^3-x^2-x-2}+x=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 72 Giải phương trình**

$\sqrt{6x^2-2x+1}-x^2.\sqrt[3]{2x^2-4x+2}=-x^2-x+1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;-1;3$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt[3]{2x^2-4x+2}-2$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{6x^2-2x+1}-(x^2-x+1)-x^2(\sqrt[3]{2x^2-4x+2}-2)=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=-1; x=3$

**Thí dụ 73 Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2-2x+1}+x^2.\sqrt[3]{x^3+24x+26}=x^3+3x^2-x+1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;-1;3$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt[3]{2x^2-4x+2}-x-2$

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{6x^2-2x+1}-(x^2-x+1)+x^2(\sqrt[3]{2x^2-4x+2}-x-2)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=-1; x=3$

**Thí dụ 74 Giải phương trình**

$$\frac{2\sqrt{6x^2+2x+1}-2x+4}{x^2+3}+\frac{6\sqrt{2x^2+x+1}-3x}{x^2+2}=5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$pt \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x-1)}{x^2+3}+\frac{3(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x-2)}{x^2+2}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 75 Giải phương trình**

$$\frac{3\sqrt{14x^2-6x-4}+3x-3}{x^2+1}+\frac{\sqrt{18x^2-10x+8}+x-2}{x^2+2}=4$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm 1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm 1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=4 \\ 4a-2a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$pt \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{14x^2-6x-4}+3x-3}{x^2+1}-3+\frac{\sqrt{18x^2-10x+8}+x-2}{x^2+2}-1=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=\pm 2; x=3$

**Thí dụ 76 Giải phương trình**

$$\left(\sqrt{6x^2+2x+1}+2\right)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+1\right)=(x^2+x+3)^2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+1\right)+(x^2+x+3)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+1\right)=\left(x^2+x+3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+1\right)+(x^2+x+3)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x-2\right)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 77 Giải phương trình**

$$\left(\sqrt{14x^2-6x-4}+3\right)\left(\sqrt{18x^2-10x+8}+1\right)=(x^2-x+5)^2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $\pm1;-2;4$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Do** $\pm1;-2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=4 \\ 4a-2a+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{14x^2-6x-4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-x+4-\sqrt{18x^2-10x+8}$

$$pt \Leftrightarrow \left(\sqrt{14x^2-6x-4}-x^2+x-2\right)\left(\sqrt{18x^2-10x+8}+1\right)+(x^2-x+5)\left(\sqrt{18x^2-10x+8}-x^2+x-4\right)=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=\pm2; x=3$

**Thí dụ 78 Giải phương trình**

$$\left(\sqrt{6x^2+2x+1}+x^2-x+2\right)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+x^2-x+1\right)=(2x^2+3)^2$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^2+2x+1}-x^2-x-1\right)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}+x^2-x+1\right)+(2x^2+3)\left(2\sqrt{2x^2+x+1}-x^2-x-2\right)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 79 Giải phương trình**

$$x^2+x+3+\frac{x-4}{x^2-x+4}-\frac{x^2}{2x^2+x+1}=2\sqrt{2x^2+x+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$$Pt \Leftrightarrow (1+\frac{x-4}{x^2-x+4}-\frac{x^2}{2x^2+x+1})+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 80 Giải phương trình**

$$2x^2+3x-4-\frac{4x-10}{x^2+2}=\sqrt{6x^2+2x+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

$$pt \Leftrightarrow x^2+2x-5-\frac{4x-10}{x^2+2}+x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^2+2}+\frac{x^4+2x^2-3x^2}{x^2+x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 81 Giải phương trình**

$$2x^2+3x-4-\frac{4x-10}{x^2+2}=\sqrt{6x^2+2x+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

$$pt \Leftrightarrow x^2+2x-5-\frac{4x-10}{x^2+2}+x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^2+2}+\frac{x^4+2x^2-3x^2}{x^2+x+1+\sqrt{6x^2+2x+1}}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 82 Giải phương trình**

$$\sqrt{12x^2-4x+1}+\sqrt{6x^2+2x+1}=\left|2x^2+2x-1\right|+x^2+x+1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $|2x^2+2x-1|-\sqrt{12x^2-4x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

$$pt \Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}+\left|2x^2+2x-1\right|-\sqrt{12x^2-4x+1}=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 83 Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{6x^2+2x+1}}-2}{\dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{\sqrt{6x^2+2x+1}}-x^2}=\frac{\dfrac{2\sqrt{2x^2+x+1}}{x^2+x+2}-2}{\dfrac{2(x+1)\sqrt{2x^2+x+1}}{x^2+x+2}-x^2}$$

**Hay** $\dfrac{x^2+x+1-2\sqrt{6x^2+2x+1}}{(x+1)(x^2+x+1)-x^2\sqrt{6x^2+2x+1}}=\dfrac{2x^2+2x+4-2\sqrt{2x^2+x+1}}{x^4+x^3+2x^2-2(x+1)\sqrt{2x^2+x+1}}$

**Hướng dẫn.**

**Giải phương trình đã cho ta không cần nhẩm nghiệm, mà biến đổi về PT tích rồi nhân liên hợp.**

**Các bạn đọc phần ghép 2 phương trình thành 1 phương trình viết ở phần tìm biểu thức liên hợp dùng Casio sẽ biết hướng làm cụ thể.**

**Dạng PT thí dụ này như sau :**

$$(\frac{a}{b}m-n)(\frac{c}{d}p-q)=(\frac{c}{d}m-n)(\frac{a}{b}p-q)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)(mq-np)$$

**Ý tưởng :PT ở thí dụ 73 được tạo ra từ**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=2x^2+2x+3$$

**Biểu thức liên hợp là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Và chọn** $m=1;n=2;p=x+1;q=x^2$

**PTcó 5 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=0;x=1;x=-3;x=1\pm\sqrt{3}$

**Thí dụ 84 Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{2\sqrt{2x^2+3x+2}}{x^2+x+2}-9}{\dfrac{x^2+x+3}{\sqrt{10x^2+14x+13}}-9}=\frac{\dfrac{2(x+1)\sqrt{2x^2+3x+2}}{x^2+x+2}-x}{\dfrac{(x+1)(x^2+x+3)}{\sqrt{10x^2+14x+13}}-x}$$

**Hay** $\dfrac{9x^2+9x+18-2\sqrt{2x^2+3x+2}}{x^2+x+3-9\sqrt{10x^2+14x+13}}=\dfrac{x^3+x^2+2x-2(x+1)\sqrt{2x^2+3x+2}}{(x+1)(x^2+x+3)-x\sqrt{10x^2+14x+13}}$

**Hướng dẫn.**

PT thí dụ 74 được tạo ra từ PT:

$2\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{10x^2+14x+13}=2x^2+2x+5$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;\pm2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$

**và** $x^2+x+3-\sqrt{10x^2+14x+13}$

**Chọn** $m=1;n=9;\,p=x+1;q=x$

**PTcó 4 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=-1;\,x=\pm2;\,x=\dfrac{-9}{8}$

**☺Thí dụ 85 Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^2+x+1}+2}{\dfrac{x^2+x+2}{2\sqrt{2x^2+x+1}}+2}=\frac{\dfrac{x^3\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^2+x+1}+5}{\dfrac{x^5+x^4+2x^3}{2\sqrt{2x^2+x+1}}+5}$$

**Hay** $\dfrac{2x^2+2x+2+\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^2+x+2+4\sqrt{2x^2+x+1}}=\dfrac{5x^2+5x+5+x^3.\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^5+x^4+2x^3+10\sqrt{2x^2+x+1}}$

**Hướng dẫn.**

**Giải phương trình đã cho nhìn phức tạp ta không cần nhẩm nghiệm, mà cần biết nó có dạng** $(\frac{a}{b}m-n)(\frac{c}{d}p-q)=(\frac{c}{d}m-n)(\frac{a}{b}p-q)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)(mq-np)$

**Như vậy ta cần biến đổi về PT tích rồi nhân liên hợp (nếu cần) bằng cách**

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=0\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}-1+1-\dfrac{c}{d}=0\Leftrightarrow\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{d-c}{d}=0$

**Từ PT** $\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=2x^2+2x+3$

**ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Do** $0;1;-3$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a-3a+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

$PT \Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}+x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}=0$

**PT đã cho có 4 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=0; x=1; x=-3; x=\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

**☺Thí dụ 86 Giải phương trình**

$$\frac{2x^2+2x+2+\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^3+x^2+x+3\sqrt{6x^2+2x+1}}=\frac{x^2+x+2+4\sqrt{2x^2+x+1}}{3x^2+3x+6+2x\sqrt{2x^2+x+1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Từ Thí dụ 1 Giải phương trình**

$\sqrt{6x^2+2x+1}+2\sqrt{2x^2+x+1}=2x^2+2x+3$

**Biểu thức liên hợp là** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+x+1}$

**Và chọn** $m=1; n=2; p=3; q=x$

**PTcó 4 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=0; x=1; x=-3; x=6$

**☺Thí dụ 87 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-12x+8}=\frac{(x-2)^2(x^2+2)}{1+\sqrt{x^2+2}}+2x-2$$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{5x^2-12x+8}=(x-2)^2(\sqrt{x^2+3}-1)+2x-2$

**Ta nhẩm được 2 nghiệm đẹp của PT là** $x=1, x=-1; x=2$

**Các biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$ **ứng với nghiệm của PT là** $x=1, x=-1; x=2$

**và** $\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{3-2x}$ **ứng với nghiệm của PT là** $x=1, x=-1$

**Nghiệm của PT đã cho là** $x=1, x=-1$

**Thí dụ 88 Giải phương trình**

$$\frac{3x^2-5x+10}{\sqrt{4x^2-5x+10}-|x|}+3\sqrt{x^2-3x+6}=\frac{6x^2-4x+8}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{4x^2-5x+10}-|x|)(\sqrt{4x^2-5x+6}+|x|)}{\sqrt{4x^2-5x+10}-|x|}+3\sqrt{x^2-3x+6}=\frac{6x^2-4x+8}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow |x|\sqrt{4x^2-5x+10}+3|x|\sqrt{x^2-3x+6}=5x^2-4x+8 (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}+3\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}=5x^2-4x+8$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT(*) là** $1;\pm 2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1\,; x=\pm 2$

**Thí dụ 89 Giải phương trình**

$$\frac{3x^2-5x+10}{\sqrt{4x^2-5x+10}-x}+3\sqrt{x^2-3x+6}=\frac{6x^2-4x+8}{x}$$

**Hướng dẫn.**

**Do** $\sqrt{4x^2-5x+10}-x=\sqrt{x^2+3x^2-5x+10}-x>|x|-x\geq 0$

**Nên** $VT>0$ **mà** $6x^2-4x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}+3\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}=5x^2-4x+8$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp (kể cả nghiệm âm ) của PT là** $1;\pm2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-5x^3+10x^2}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{x^4-3x^3+6x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1$ ; $x=2$

**Thí dụ 90 Giải phương trình**

$$\frac{7x^2-9x+18}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{16x^2-9x+18}-3|x|)(\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|)}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}+2\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}=10x^2-3x+6$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $1;\pm2$

**Biểu thức cần tìm là** $4x^2-x+2-\sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}$

**và** $3x^2-x+2-\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1$ ; $x=\pm2$

**Thí dụ 91 Giải phương trình**

$$\frac{7x^2-9x+18}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{|x|}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{16x^2-9x+18}-3|x|)(\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|)}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}+2\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}=10x^2-3x+6$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $1;\pm 2$

**Biểu thức cần tìm là** $4x^2-x+2-\sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}$ **và** $3x^2-x+2-\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1$ ; $x=\pm 2$

**Thí dụ 92** **Giải phương trình**

$$\frac{7x^2-9x+18}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3x}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{x}$$

**Hướng dẫn.**

**Tương tự các ví dụ trên ta thấy** $x>0$

$$pt\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{16x^2-9x+18}-3x)(\sqrt{16x^2-9x+18}+3|x|)}{\sqrt{16x^2-9x+18}+3x}+2\sqrt{9x^2-7x+14}=\frac{7x^2-3x+6}{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}+2\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}=10x^2-3x+6$$

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $1;\pm 2$

**Biểu thức cần tìm là** $4x^2-x+2-\sqrt{16x^4-9x^3+18x^2}$

**và** $3x^2-x+2-\sqrt{9x^4-7x^3+14x^2}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1$ ; $x=\pm 2$

**Thí dụ 93** **Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-10x+9}+2\sqrt{3x^2-6x+4}=3x^2-6x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{5x^2-10x+9}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{3x^2-6x+4}$

$$\sqrt{5x^2-10x+9}-(x^2-2x+3)+2[\sqrt{3x^2-6x+4}-(x^2-2x+2)]=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**Nâng cấp:**

**a )Giải phương trình** $\frac{x^2+2x}{\sqrt{5x^2-10x+9}-2x+3}+2\sqrt{3x^2-6x+4}=3x^2-4x+4$

$$pt \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{5x^2-10x+9}-2x+3\right)\left(\sqrt{5x^2-10x+9}+2x-3\right)}{\sqrt{5x^2-10x+9}-2x+3}+2\sqrt{3x^2-6x+4}=3x^2-4x+4$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**b )Giải phương trình** $\frac{1}{\sqrt{5x-10\sqrt{x}+9}+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{3x-6\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}}=\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=4$

**c)Giải phương trình** $\frac{\sqrt{5x^2-10x+9}}{x^2-2x+3}=\frac{x^2-2x+2}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x+4}\left(\sqrt{5x^2-10x+9}-x^2+2x-3\right)+\left(\sqrt{3x^2-6x+4}-x^2+2x-2\right)(x^2-x+3)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

$$d)2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{5x^2-10x+9}=\frac{7(x-1)^2}{3x^2-6x+7}$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{5x^2-10x+9}$$
$$=\frac{(2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{5x^2-10x+4})(2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{5x^2-10x+9})}{3x^2-6x+7}$$

$$PT \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{5x^2-10x+9}=0\\ 2\sqrt{3x^2-6x+4}+\sqrt{5x^2-10x+9}=3x^2-6x+7(*)\end{array}\right.$$

**Giải (*):Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{5x^2-10x+9}$

**biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{3x^2-6x+4}$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**Thí dụ 94 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2-12x+8}+2\sqrt{7x^2-16x+3}=3x^2-6x+8$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-16x+13}$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=-1; x=1; x=2$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$\sqrt{\sqrt{5x^2-12x+8}-1}+\sqrt{\sqrt{7x^2-16x+13}+2x-3}=2x-1(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=1; x=2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{5x^2-12x+8}-1}-(x-1)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{7x^2-16x+13}+4x-2}-(x+1)$

**Do** $VT(*)\geq 0$ **suy ra** $VP(*)=2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$

**Xét** $\frac{1}{2}\leq x<1$ **có:** $\sqrt{\sqrt{7x^2-16x+13}+4x-2}=\sqrt{\sqrt{4x^2+3x^2-16x+13}+4x-2}$

$=\sqrt{\sqrt{4x^2+(x-1)(3x-13)}+4x-2}>\sqrt{\sqrt{4x^2}+4x-2}=\sqrt{6x-2}\geq\sqrt{6.\frac{1}{2}-2}=1$

**suy ra** $VT(*)>1$

**Do** $\frac{1}{2}\leq x<1$ **suy ra** $VP(*)=2x-1<1$

**Vì vậy PT(*) có nghiệm** $x\geq 1$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{5x^2-12x+8}-1}+(x-1)>0$

$$\sqrt{\sqrt{7x^2-16x+13}+4x-2}+(x+1)>0$$

$$PT(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x^2-2x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{7x^2-8x+13}-(x^2-2x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=1; x=2$

**Thí dụ 95 Giải phương trình**

$$3\sqrt{6x^2+6x+4}+\sqrt{8x^2+8x+9}=4x^2+4x+9$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;-1;1;-2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{6x^2+6x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+x+3-\sqrt{8x^2+8x+9}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=-1; x=1; x=-2; x=0$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$\sqrt{\sqrt{6x^2+6x+4}+3x+2}+3\sqrt{\sqrt{8x^2+8x+9}+3x+1}=4x+8(*)$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=\pm1; x=-2; x=0$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{6x^2+6x+4}+3x+2}-(x+2)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{8x^2+8x+9}+3x+1}-(x+2)$

**Do** $VT(*)\geq 0$ **suy ra** $VP(*)=4x+8\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{6x^2+6x+4}+3x+2}+(x+2)>0$

$$\sqrt{\sqrt{6x^2+6x+4}+3x+2}+(x+2)>0$$

$$PT(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6x^2+6x+4}-(x^2+x+2)}{MS1}+3.\frac{\sqrt{8x^2+8x+4}-(x^2+x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\pm 1; x=-2; x=0$

**Thí dụ 96 Giải phương trình(Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn)**

$$\frac{2\sqrt{2x^2+4x+3}}{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{6x^2+12x+7}}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{6x^2+12x+7}$

**và** $x^2+2x+3-2\sqrt{2x^2+4x+3}$

**Ta có:**

$$\frac{2\sqrt{2x^2+4x+3}}{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{6x^2+12x+7}}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+12x+7}\left(2\sqrt{2x^2+4x+3}-x^2-2x-2\right)=x^2+2x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+12x+7}\left(2\sqrt{2x^2+4x+3}-x^2-2x-3\right)+\sqrt{6x^2+12x+7}-(x^2+2x+2)=0$$

**Nhân liên hợp PT đã cho có 3 nghiệm** $x=\pm 1; x=-3$

**Thí dụ 97 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-10x+9}=(x-1)^2+\frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{3x^2-6x+4}$

**và** $x^2-2x+3-\sqrt{5x^2-10x+9}$

**Ta có:**

$$\sqrt{5x^2-10x+9}=(x-1)^2+\frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x+4}\left(\sqrt{5x^2-10x+9}-x^2+2x-1\right)=2x^2-4x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x+4}\left(\sqrt{5x^2-10x+9}-x^2+2x-3\right)+2(\sqrt{6x^2+12x+7}-x^2+2x-2)=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**Thí dụ 98 Giải phương trình(Vũ Hồng Phong )**

$$\frac{2\sqrt{3x^2-4x+5}}{x^2-x+2}-\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}$

**và** $x^2-x+4-2\sqrt{3x^2-4x+5}$

**Ta có:**

$$\frac{2\sqrt{3x^2-4x+5}}{x^2-x+2}-\frac{1}{\sqrt{2x^2-3x+2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+2}\left(2\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-2\right)=x^2-x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+2}\left(2\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-4\right)+2\sqrt{2x^2-3x+5}-(x^2-x+2)=0$$

**Nhân liên hợp PT suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=\pm 2; x=1$

**Thí dụ 99 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-14x+9}+x-3=\frac{x^2(x^2-x+1)}{\sqrt{7x^2-10x+1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+3-\sqrt{11x^2-14x+9}$

**và** $x^2-x+1-\sqrt{7x^2-10x+1}$

**Ta có:**

$$\sqrt{11x^2-14x+9}+x-3=\frac{x^2(x^2-x+1)}{\sqrt{7x^2-10x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x^2-10x+1}\left(\sqrt{11x^2-14x+9}+x-3\right)=x^2(x^2-x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x^2-10x+1}\left(\sqrt{11x^2-14x+9}-x^2+x-3\right)+x^2[\sqrt{7x^2-10x+1}-(x^2-x+1)]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-2; x=2$

**Thí dụ 100 Giải phương trình**

$$\frac{1}{x+\sqrt{13x^2-8x+4}}+\frac{1}{x-1+\sqrt{17x^2-10x+9}}=\frac{1}{1+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{13x^2-8x+4}$

**và** $2x^2-x+3-\sqrt{17x^2-10x+9}$

**Ta có:**

$$\frac{1}{x+\sqrt{13x^2-8x+4}}+\frac{1}{x-1+\sqrt{17x^2-10x+9}}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+\sqrt{13x^2-8x+4}}-\frac{1}{2+2x^2}+\frac{1}{x-1+\sqrt{17x^2-10x+9}}-\frac{1}{2+2x^2}=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở từng phân thức suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-1; x=1$

**Chú ý:Biểu thức** $x+\sqrt{13x^2-8x+4}>0$ **và** $x-1+\sqrt{17x^2-10x+9}>0$

**Thí dụ 101 Giải phương trình**

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3x+2}-1}+\frac{1}{2\sqrt{6x^2+10x+5}}=\frac{3}{2x^2+2x+2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$

**và** $x^2+x+1-\sqrt{6x^2+10x+5}$

**Ta có:**

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2+3x+2}-1}+\frac{1}{2\sqrt{6x^2+10x+5}}=\frac{3}{2x^2+2x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2x^2+3x+2}-1}-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2\sqrt{6x^2+10x+5}}-\frac{1}{2x^2+2x+2}=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở từng phân thức suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-2; x=2$

**Chú ý:Biểu thức** $2\sqrt{2x^2+3x+2}-1>0$ **và** $\sqrt{6x^2+10x+5}>0$

**Thí dụ 102 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-16x+9}+(1-x^2)\sqrt{x^2-4x+9}=-2x^2-2x+6$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{11x^2-16x+9}$

**và** $3-\sqrt{x^2-4x+9}$

**Ta có:** $\sqrt{11x^2-16x+9}+(1-x^2)\sqrt{x^2-4x+9}=-2x^2-2x+6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{11x^2-16x+9}-(x^2-2x+3)+(1-x^2)(\sqrt{x^2-4x+9}-3)=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=-1; x=1; x=4$

**Nâng cấp**

**a) Giải phương trình**

$$\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{11x^2-16x+9}}=\frac{\sqrt{13x^2-20x+16}-1}{x^2-2x+3}$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2-2x+3}{\sqrt{11x^2-16x+9}}=\frac{\sqrt{13x^2-20x+16}-1}{x^2-2x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{11x^2-16x+9}}-1+1-\frac{\sqrt{13x^2-20x+16}-1}{x^2-2x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3-\sqrt{11x^2-16x+9}}{\sqrt{11x^2-16x+9}}+\frac{x^2-2x+4-\sqrt{13x^2-20x+16}}{x^2-2x+3}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-1; x=1; x=4$

**b) Giải phương trình**

$$\left(\sqrt{11x^2-16x+9}+2x\right)\left(\sqrt{13x^2-20x+16}+2x-1\right)=(x^2+3)^2$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{\sqrt{11x^2-16x+9}+2x}=\frac{\sqrt{13x^2-20x+16}+2x-1}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{\sqrt{11x^2-16x+9}+2x}-1+1-\frac{\sqrt{13x^2-20x+16}+2x-1}{x^2+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3-\sqrt{11x^2-16x+9}}{\sqrt{11x^2-16x+9}+2x}+\frac{x^2-2x+4-\sqrt{13x^2-20x+16}}{x^2+3}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=-1; x=1; x=4$

**Chú ý:** $\sqrt{11x^2-16x+9}+2x>0, \forall x$ $\sqrt{13x^2-20x+16}+2x-1>0, \forall x$

**Nên ta có thể đưa về giải bất phương trình chẳng hạn**

**Giải bất phương trình**

$$\left(\sqrt{11x^2-16x+9}+2x\right)\left(\sqrt{13x^2-20x+16}+2x-1\right)\le(x^2+3)^2$$

**Thí dụ 103 Giải phương trình**

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-10x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{11x^2-14x+9}-1}=\frac{2}{x^2-x+2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+3-\sqrt{11x^2-14x+9}$

**và** $x^2-x+1-\sqrt{7x^2-10x+1}$

**Ta có:**

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-10x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{11x^2-14x+9}-1}=\frac{2}{x^2-x+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-10x+1}+1}-\frac{1}{x^2-x+2}+\frac{1}{\sqrt{11x^2-14x+9}-1}-\frac{1}{x^2-x+2}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-2; x=2$

**Chú ý:Biểu thức** $\sqrt{11x^2-14x+9}-1>0$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$\frac{x^2-x+3}{\sqrt{11x^2-14x+9}}=\frac{\sqrt{7x^2-10x+1}}{x^2-x+1}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow \frac{x^2-x+3}{\sqrt{11x^2-14x+9}}-1+1-\frac{\sqrt{7x^2-10x+1}}{x^2-x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x+3-\sqrt{11x^2-14x+9}}{\sqrt{11x^2-14x+9}}+\frac{x^2-x+1-\sqrt{7x^2-10x+1}}{x^2-x+1}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 3 nghiệm** $x=0; x=-2; x=2$

## *B.Các Phương trình tìm nhân tử không dùng Casio*

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$6\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}=4x^2+4x-5$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=1; x=-3$

**Có vẻ cần tìm thêm nghiệm ngoại lai. Ta xét PT sau**

$$-6\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{12x^2-4x+1}=4x^2+4x-5(*)$$

**Ta nhẩm được nghiệm đẹp của PT(*) là** $x=0$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{2x^2-2x+1}$

**Do** $x=1; x=-3$ **là nghiệm PT nên cũng là nghiệm của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 9a-3b+c=5 \end{cases}$

**Do cách đổi dấu tìm nghiệm ngoại lai x=0 nên x=0 là nghiệm biểu thức**

$ax^2+bx+c+\sqrt{2x^2-2x+1}$ **suy ra** $c=-1$

**Từ đó ta có** $a=1; b=1; c=-1$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x-1-\sqrt{2x^2-2x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $2x^2+2x-1-\sqrt{12x^2-4x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1$

**Đặt** $\sqrt{2x^2-2x+1}=a\geq 0$ ; $\sqrt{12x^2-4x+1}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-4x^2-4x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b+1)(2a+b+2)=0$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1=0(**)$

**Cách 1. Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{2x^2-2x+1}=x^2+x-1$ **và** $\sqrt{12x^2-4x+1}=2x^2+2x-1$

**Cách 2. Chuyển vế và bình phương PT(**)**

**PTcó 2 nghiệm** $x=1; x=-3$

**!!☺*Giải phương trình(nâng cấp thí dụ 1)** Tác giả: Vũ Hồng Phong

$2(x+1)\sqrt{2x^2-2x+1}+2x^2+3x=(x+2)\sqrt{12x^2-4x+1}$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=1; x=-3$

**Nếu coi cả 3 nghiệm là nghiệm của biểu thức thì**

**Biểu thức cần tìm là** $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+1-\sqrt{2x^2-2x+1}$

**biểu thức nữa cần tìm là** $\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1-\sqrt{12x^2-4x+1}$

**Đến đây có lẽ ta không phát hiện được mối liên nào đặc biệt !☺**

**Có vẻ cần coi ít nhất một nghiệm nào đó trong 3 nghiệm là nghiệm ngoại lai của biểu thức cần tìm. Do ở thí dụ 1 ta đã biết x=0 là nghiệm ngoại lai của biểu thức cần tìm thì sẽ có mối liên hệ đặc biệt!!**

**Như vậy biểu thức cần tìm là** $x^2+x-1-\sqrt{2x^2-2x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $2x^2+2x-1-\sqrt{12x^2-4x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1$

**Đặt** $\sqrt{2x^2-2x+1}=a\ge 0$ ; $\sqrt{12x^2-4x+1}=b\ge 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-4x^2-4x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b+1)(2a+b-2x-3)=0$

**+Với** $2a-b+1=0\Rightarrow 2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{12x^2-4x+1}+1=0(**)$

**Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{2x^2-2x+1}=x^2+x-1$ **và** $\sqrt{12x^2-4x+1}=2x^2+2x-1$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;x=-3$

**+Với** $2a+b-3-2x=0\Rightarrow 2\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{12x^2-4x+1}=3+2x$

**Giải tương tự PTcó thêm nghiệm** $x=0$ **và** $x=1$

**Nghiệm của PT đã cho là** $x=0;x=1;x=-3$

**☺Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$2\sqrt{-x^2+4x+1}-3\sqrt{8x+1}=4x^2-8x-1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=1$

**Đặc biệt dùng đạo hàm thấy** $x=0$ **là nghiệm kép**

**(lưu ý có thể tìm nghiệm ngoại lai** $x=3$ **)**

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{-x^2+4x+1}$

**Lấy đạo hàm được** $2ax+b-\dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+1}}$

**Do** $x=0; x=1$ **là nghiệm PT nên cũng là nghiệm của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=2 \end{cases}$

**Do x=0 là nghiệm kép của biểu thức** $ax^2+bx+c-\sqrt{-x^2+4x+1}$ **suy ra** $2a.0+b=2$

**Từ đó ta có** $a=-1; b=2; c=1$

**Biểu thức cần tìm là** $-x^2+2x+1-\sqrt{-x^2+4x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $-2x^2+4x-11-\sqrt{8x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1$

**Đặt** $\sqrt{-x^2+4x+1}=a\ge 0$ ; $\sqrt{8x+1}=b\ge 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-4x^2+8x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b-1)(2a+b+2)=0$

$\Rightarrow 2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1=0(**)$

**Cách 1. Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{-x^2+4x+1}=-x^2+2x+1$ **và** $\sqrt{8x+1}=-2x^2+4x+1$

**Cách 2. Chuyển vế và bình phương PT(**)**

**PTcó 2 nghiệm** $x=0; x=1$

**Thí dụ 3 Giải phương trình(nâng cấp của thí dụ 3)**

$(2x^2+2)\sqrt{-x^2+4x+1}-(x^2+3)\sqrt{8x+1}=5x^2-8x-1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=1$

**Đặc biệt dùng đạo hàm thấy** $x=0$ **là nghiệm kép(hoặc nghiệm ngoại lai** $x=3$ **)**

**Biểu thức cần tìm là** $-x^2+2x+1-\sqrt{-x^2+4x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $-2x^2+4x-11-\sqrt{8x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1$

**Đặt** $\sqrt{-x^2+4x+1}=a\geq 0$ ; $\sqrt{8x+1}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-4x^2+8x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b-1)(2a+b+x^2+2)=0$

$\Rightarrow 2\sqrt{-x^2+4x+1}-\sqrt{8x+1}-1=0(**)$

**Cách 1. Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{-x^2+4x+1}=-x^2+2x+1$ **và** $\sqrt{8x+1}=-2x^2+4x+1$

**Cách 2. Chuyển vế và bình phương PT(**)**

**PTcó 2 nghiệm** $x=0; x=1$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$(x+1)\sqrt{x^2+7x+1}-3\sqrt{x^4+16x^3+8x}=7x^3-16x^2-x+1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=1$

**Đặc biệt dùng đạo hàm thấy** $x=1$ **là nghiệm kép(bội)**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+4x+1-(x+1)\sqrt{x^2+7x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $x^2+4x-\sqrt{x^4+16x^3+8x}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $(x+1)\sqrt{x^2+7x+1}-\sqrt{x^4+16x^3+8x}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $(x+1)\sqrt{x^2+7x+1}-\sqrt{x^4+16x^3+8x}-1$

**Đặt** $(x+1)\sqrt{x^2+7x+1}=a\geq 0$ ; $\sqrt{x^4+16x^3+8x}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=-7x^3+16x^2+x+1(*)$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

$\Rightarrow (x+1)\sqrt{x^2+7x+1}-\sqrt{x^4+16x^3+8x}-1=0(**)$

**Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{-x^2+4x+1}=-x^2+2x+1$ **và** $\sqrt{8x+1}=-2x^2+4x+1$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;x=1$

**Thí dụ 5 Giải phương trình**

$\sqrt{7x^2-12x+9}-3\sqrt{5x^2-8x+4}+2x^2-4x+3=0$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0;x=1;x=3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{7x^2-12x+9}$

**Do** $x=0;x=1;x=3$ **là nghiệm PT nên cũng là nghiệm của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$

**Từ đó ta có** $a=1;b=-2;c=3$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{7x^2-12x+9}=a\geq 0$ ; $\sqrt{5x^2-8x+4}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2-4x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(a-b+1)(a+b+2)=0$

$\Rightarrow \sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1=0(**)$

**Cách 1. Từ (*) và (**) suy ra** $\sqrt{7x^2-12x+9}=x^2-2x+3$ **và** $\sqrt{5x^2-8x+4}=x^2-2x+2$

**Cách 2. Chuyển vế và bình phương PT(**)**

**PTcó 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

### ✡ Thí dụ 6 Giải phương trình

$2(x+1)\sqrt{4x+1}-\sqrt{16x^3+24x^2+1}=4x^2+8x+1$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=-1$

**Đặc biệt dùng đạo hàm thấy** $x=-1$ **là nghiệm kép(bội). Hướng khác:**

**( tìm nghiệm ngoại lai x=2 là nghiệm PT:** $2(x+1)\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^3+24x^2+1}=4x^2+8x+1$**)**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+1-(x+1)\sqrt{4x+1}$

**Tương tự,biểu thức nữa cần tìm là** $-2x^2-4x+1-\sqrt{16x^3+24x^2+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2(x+1)\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^3+24x^2+1}-3=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2(x+1)\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^3+24x^2+1}-3$

**Đặt** $(x+1)\sqrt{4x+1}=a\geq 0$ ; $\sqrt{16x^3+24x^2+1}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=12x^2+24x+3(*)$

**Thay vào PT được** $(2a+b-3)(2a-b)=0$

**Với** $2a+b-3=0\Rightarrow 2(x+1)\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^3+24x^2+1}-3=0(**)$

**Từ (*) và (**) suy ra** $(x+1)\sqrt{4x+1}=x^2+2x+1$ **và** $\sqrt{16x^3+24x^2+1}=-2x^2-4x+1$

**PT(**) có 2 nghiệm** $x=0; x=-1$

**Với** $2a-b=0 \Rightarrow 2(x+1)\sqrt{4x+1}=\sqrt{16x^3+24x^2+1} \Rightarrow x=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$

**PT đã cho có 3 là** $x=0; x=-1\,; x=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$

✡**Thí dụ 7 Giải phương trình**

$2\sqrt{6x^2-2x+1}-\sqrt{-4x^2+20x+25}=4x^2-4x-3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=0; x=-1$

**Có vẻ cần tìm thêm nghiệm ngoại lai. Ta xét PT sau**

$2\sqrt{6x^2-2x+1}+\sqrt{-4x^2+20x+25}=4x^2-4x-3(*)$

**Ta nhẩm được nghiệm đẹp của PT(*) là** $x=3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{6x^2-2x+1}$

**Vì cách đổi dấu trước căn nên** $x=0; x=-1; x=3$ **là nghiệm PT của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} c=1 \\ a-b+c=3 \\ 9a+3b+c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-2x+1}$ (1)

**Xét** $ax^2+bx+c-\sqrt{-4x^2+20x+25}$

**Do cách đổi dấu tìm nghiệm ngoại lai x=3 nên x=3 là**

**nghiệm biểu thức** $ax^2+bx+c+\sqrt{-4x^2+20x+25}$

**Từ đó ta có** $\begin{cases} c = 5 \\ a - b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$

**biểu thức nữa cần tìm là** $-2x^2 + 2x + 5 - \sqrt{-4x^2 + 20x + 25}$ (2)

**Cho 2 biểu thức (1),(2)bằng 0 suy ra** $2\sqrt{6x^2 - 2x + 1} + \sqrt{-4x^2 + 20x + 25} - 7 = 0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{6x^2 - 2x + 1} + \sqrt{-4x^2 + 20x + 25} - 7$

**Đặt** $\sqrt{6x^2 - 2x + 1} = a \geq 0$ ; $\sqrt{-4x^2 + 20x + 25} = b \geq 0$

**Tacó** $4a^2 - b^2 = 28x^2 - 28x - 21$

**Thay vào PT được** $(2a + b - 7)(2a - b) = 0$

**Giải 2 trường hợp suy PT đã cho có 4 nghiệm** $x = 0; x = -1; x = \frac{-1}{2}; x = \frac{3}{2}$

✡**Thí dụ 8 Giải phương trình**

$2\sqrt{5x^2 - 12x + 8} - \sqrt{17 - 8x} = 4x^2 - 8x + 3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x = 1; x = 2$

**Có vẻ cần tìm thêm nghiệm ngoại lai. Ta xét PT sau**

$2\sqrt{5x^2 - 12x + 8} + \sqrt{17 - 8x} = 4x^2 - 8x + 3$(*)

**Ta nhẩm được nghiệm đẹp của PT(*) là** $x = -1$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2 + bx + c - \sqrt{5x^2 - 12x + 8}$

**Vì cách đổi dấu trước căn nên** $x = 1; x = 2; x = -1$ **là nghiệm PT của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ a - b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2 - 2x + 2 - \sqrt{5x^2 - 12x + 8}$ (1)

**Xét** $ax^2+bx+c-\sqrt{17-8x}$

**Do cách đổi dấu tìm nghiệm ngoại lai x=-1 nên x=-1 là**

**nghiệm biểu thức** $ax^2+bx+c+\sqrt{17-8x}$

**Từ đó ta có biểu thức nữa cần tìm là** $-2x^2+4x+1-\sqrt{17-8x}$ (2)

**Cho 2 biểu thức (1),(2)bằng 0 suy ra** $2\sqrt{5x^2-12x+8}+\sqrt{17-8x}-5=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{5x^2-12x+8}+\sqrt{17-8x}-5$

**Đặt** $\sqrt{5x^2-12x+8}=a\geq 0$ ; $\sqrt{17-8x}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=20x^2-40x+15$

**Thay vào PT được** $(2a+b-5)(2a-b)=0$

**Giải 2 trường hợp suy PT đã cho có 4 nghiệm** $x=1; x=2; x=\frac{1}{2}; x=\frac{3}{2}$

**✡Thí dụ 9 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-12x+8}-\sqrt{5-x^2}=2x^2-4x+1$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT đã cho là** $x=1; x=2$

**Có vẻ cần tìm thêm nghiệm ngoại lai. Ta xét PT sau**

$$\sqrt{5x^2-12x+8}+\sqrt{5-x^2}=2x^2-4x+1$$

**Ta nhẩm được nghiệm đẹp của PT(*) là** $x=-1$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-12x+8}$

**Vì cách đổi dấu trước căn nên** $x=1; x=2; x=-1$ **là nghiệm PT của biểu thức cần tìm**

**ta có hệ** $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=2 \\ a-b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-12x+8}$ (1)

**Xét** $ax^2+bx+c-\sqrt{5-x^2}$

**Do cách đổi dấu tìm nghiệm ngoại lai x=-1 nên x=-1 là**

**nghiệm biểu thức** $ax^2+bx+c+\sqrt{5-x^2}$

**Từ đó ta có biểu thức nữa cần tìm là** $-x^2+2x+1-\sqrt{5-x^2}$ (2)

**Cho 2 biểu thức (1),(2)bằng 0 suy ra** $\sqrt{5x^2-12x+8}+\sqrt{5-x^2}-3=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{5x^2-12x+8}+\sqrt{5-x^2}-3=0$

**Đặt** $\sqrt{5x^2-12x+8}=a\geq 0$ ; $\sqrt{17-8x}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=6x^2-12x+3$

**Thay vào PT được** $(a+b-3)(a-b)=0$

**Giải 2 trường hợp suy PT đã cho có 4 nghiệm** $x=1; x=2; x=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; x=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**☺Thí dụ 10 Giải phương trình**

$3\sqrt{5x^2+4x}+3\sqrt{37x^2+24x-12}=8x^2+12x+10$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được 3 nghiệm đẹp của PT là** $x=\pm 1; x=-4$

**Các biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+4-3\sqrt{5x^2+4x}$ **và** $2x^2+3x+2-\sqrt{37x^2+24x-12}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $3\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{37x^2+24x-12}-2=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $3\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{37x^2+24x-12}-2$

**Đặt** $3\sqrt{5x^2+4x}=a\geq 0$ ; $\sqrt{37x^2+24x-12}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=8x^2+12x+10(*)$

**Thay vào PT được** $(a-b-2)(a+b+1)=0$

**suy ra** $3\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{37x^2+24x-12}-2=0(**)$

**Từ (*),(**) suy ra a,b theo x (chính là kết quả tìm biểu thức ở trên)**

**Nghiệm của PT là** $x=\pm 1; x=-4$

😊**Thí dụ 11 Giải phương trình**

$\sqrt{6x^2+2x+1}+\sqrt{42x^2+6x+1}=4x^2+4x+2$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;-3$

**Các biểu thức cần tìm là** $\sqrt{6x^2+2x+1}-(x^2+x+1)$ **và** $\sqrt{42x^2+6x+1}-(3x^2+3x+1)$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $3\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{42x^2+6x+1}-2=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $3\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{42x^2+6x+1}-2$

**Đặt** $\sqrt{6x^2+2x+1}=a\ge 0$ ; $\sqrt{42x^2+6x+1}=b\ge 0$

**Tacó** $9a^2-b^2=12x^2+12x+8(*)\Rightarrow 9a^2-b^2-2=3(4x^2+4x+2)$

**Thay vào PT được** $(3a-b-2)(3a+b+1)=0$

**suy ra** $3\sqrt{6x^2+2x+1}-\sqrt{42x^2+6x+1}-2=0(**)$

**Từ (*),(**) suy ra a,b theo x (chính là kết quả tìm biểu thức ở trên)**

**Nghiệm của PT là** $x=0; x=-3; x=1$

**Thí dụ 12 Giải phương trình**

$2\sqrt{2x^2+3x+2}+\sqrt{20x^2+36x+17}=3x^2+3x+3$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $-1;\pm 2$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-2\sqrt{2x^2+3x+2}$

**và** $2x^2+2x+1-\sqrt{20x^2+36x+17}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $4\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{20x^2+36x+17}-3=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $4\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{20x^2+36x+17}-3$

**Đặt** $2\sqrt{2x^2+3x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{20x^2+36x+17}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=12x^2+12x+15(*)$ $4a^2-b^2-3=12x^2+12x+12$

**Thay vào PT được** $(2a-b-3)(2a+b+1)=0$

**suy ra** $4\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{20x^2+36x+17}-3=0(**)$

**Từ (*),(**) suy ra a,b theo x (chính là kết quả tìm biểu thức ở trên)**

**PTcó 3 nghiệm** $x=-1; x=\pm 2$

**Thí dụ 13 Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{-24x^2+56x+49}=4x^2-8x-3$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**và** $-2x^2+4x+7-\sqrt{-24x^2+56x+49}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{5x^2-8x+4}+\sqrt{-24x^2+56x+49}-11=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{5x^2-8x+4}+\sqrt{-24x^2+56x+49}-11$

**Đặt** $\sqrt{5x^2-8x+4}=a\geq 0$ ; $\sqrt{-24x^2+56x+49}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=11(4x^2-8x-3)(*)$

**Thay vào PT được** $(2a+b-11)(2a-b)=0$

**PTcó 5 nghiệm** $x=0; x=1; x=3; x=1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

**Thí dụ 14 Giải phương trình**

$6\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{24x^2-40x+25}=4x^2-8x+7$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**và** $2x^2-4x+4-\sqrt{24x^2-40x+25}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{24x^2-40x+25}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{5x^2-8x+4}-\sqrt{24x^2-40x+25}+1=0$

**Đặt** $\sqrt{5x^2-8x+4}=a\geq 0$ ; $\sqrt{24x^2-40x+25}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-(4x^2-8x+9)(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b+1)(2a+b+2)=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0;x=1;x=3$

**Thí dụ 15 Giải phương trình**

$2x^2-2x+6+2x\sqrt{5x^2-8x+4}=(2x+2)\sqrt{7x^2-12x+9}$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;3$

**Giả sử biểu thức liên hợp cần tìm là** $ax^2+bx+c-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Do** $0;1;2$ **là nghiệm PT nên ta có hệ** $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=1 \\ 9a+3a+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{5x^2-8x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{7x^2-12x+9}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1$

**Đặt** $\sqrt{7x^2-12x+9}=a\geq 0$ ; $\sqrt{5x^2-8x+4}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2-4x+5(*)$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b-2x-1)=0$

**TH1:** $\sqrt{7x^2-12x+9}-\sqrt{5x^2-8x+4}-1=0$

**Kết hợp với PT(*) tìm a,b theo x hoặc bình phương ta có 3 nghiệm** $x=0;x=1;x=3$

**TH2:** $\sqrt{7x^2-12x+9}+\sqrt{5x^2-8x+4}=2x+1$

**ta có 2 nghiệm** $x=1;x=\dfrac{1+5\sqrt{73}}{38}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0;x=1;x=3$ ; $x=\dfrac{1+5\sqrt{73}}{38}$

**Thí dụ 16 Giải phương trình** **(Tác giả Vũ Hồng Phong Bất Lự,Hoàn Sơn, Tiên Du,Bắc Ninh)**

$$2x^2-7x+10+(3x-6)\sqrt{5x^2-10x+9}+(4-3x)\sqrt{3x^2-6x+4}=0$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{5x^2-10x+9}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{3x^2-6x+4}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{5x^2-10x+9}-\sqrt{3x^2-6x+4}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{5x^2-10x+9}-\sqrt{3x^2-6x+4}-1$

**Đặt** $\sqrt{5x^2-10x+9}=a\geq 0$ ; $\sqrt{3x^2-6x+4}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2-4x+5(*)$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+3x-5)=0$

**TH1:** $\sqrt{5x^2-10x+9}-\sqrt{3x^2-6x+4}-1=0$

**Kết hợp với PT(*) tìm a,b theo x hoặc bình phương ta có 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**TH2:** $\sqrt{5x^2-10x+9}+\sqrt{3x^2-6x+4}=5-3x$

**ta có 2 nghiệm** $x=0; x=\frac{47-7\sqrt{21}}{59}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=2\,; x=\frac{47-7\sqrt{21}}{59}$

**Thí dụ 17 Giải phương trình**

$(2x-1)(2x-3)=2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{-8x^2+16x+1}$

**Hướng dẫn.**

$Pt \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{-8x^2+16x+1}\right)\left(2\sqrt{3x^2-6x+4}+\sqrt{-8x^2+16x+1}\right)$
$=2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{-8x^2+16x+1}$

**PT đã cho có 5 nghiệm** $x=0; x=1; x=2\,; x=\frac{1}{2}; x=\frac{3}{2}$

**Thí dụ 18 Giải phương trình**(**PT này phức tạp chỉ để tham khảo**)

$5(4x^2-9x+6)+(2x-16)\sqrt{3x^2-4x+4}+(x+2)\sqrt{-8x^2+16x+1}=0$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{3x^2-6x+4}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $-2x^2+4x+1-\sqrt{-8x^2+16x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{3x^2-6x+4}+\sqrt{-8x^2+16x+1}-5=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{3x^2-6x+4}+\sqrt{-8x^2+16x+1}-5$

**Đặt** $\sqrt{3x^2-6x+4}=a\geq 0$ ; $\sqrt{-8x^2+16x+1}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=20x^2-40x+15(*)$

**Thay vào PT được** $(2a+b-5)(2a-b+x-3)=0$

**TH1:** $2\sqrt{3x^2-6x+4}+\sqrt{-8x^2+16x+1}-5=0$

**Kết hợp với PT(*) tìm a,b theo x hoặc bình phương ta có 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$

**TH2:** $2\sqrt{3x^2-6x+4}-\sqrt{-8x^2+16x+1}+x-3=0$

**ta có 2 nghiệm** $x=0; x=\frac{2}{131}\left(86-\frac{71}{\sqrt[3]{16033+6550\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{16033+6550\sqrt{6}}\right)$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=2$ ; $x=\frac{2}{131}\left(86-\frac{71}{\sqrt[3]{16033+6550\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{16033+6550\sqrt{6}}\right)$

**Thí dụ 19 Giải phương trình**

$2(x-2)\sqrt{5x^2+2x+1}+(3-x)\sqrt{24x^2+8x+9}=2x^2-x+5$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $0;-1;2$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+1-\sqrt{5x^2+2x+1}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2+3-\sqrt{24x^2+8x+9}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{5x^2+2x+1}-\sqrt{24x^2+8x+9}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{5x^2+2x+1}-\sqrt{24x^2+8x+9}+1$

**Đặt** $\sqrt{5x^2+2x+1}=a\geq 0$ ; $\sqrt{24x^2+8x+9}=b\geq 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=-4x^2-5(*)$

**Thay vào PT được** $(2a-b+1)(2a+b+2x-5)=0$

**TH1:** $2\sqrt{5x^2+2x+1}-\sqrt{24x^2+8x+9}+1=0$

**Kết hợp với PT(*) tìm a,b theo x hoặc bình phương ta có 3 nghiệm** $x=0; x=-1; x=2$

**TH2:** $2\sqrt{5x^2+2x+1}+\sqrt{24x^2+8x+9}=5-2x$

**ta có 2 nghiệm** $x=0; x=\dfrac{13-3\sqrt{41}}{10}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=-1; x=2$ ; $x=\dfrac{13-3\sqrt{41}}{10}$

**Thí dụ 20 Giải phương trình**

$4\sqrt{2x^2-3x+2}+\sqrt{6x^2-10x+5}=3x^2-3x+5$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=-2; x=1; x=2$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}$

**và** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-10x+5}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2$

**Nâng cấp**

**1) Giải phương trình**

$2x^2-2x+1+2\sqrt{2x^2-3x+2}-3\sqrt{6x^2-10x+5}=0$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=-2; x=1; x=2$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}$

**và** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-10x+5}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{2x^2-3x+2}-\sqrt{6x^2-10x+5}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{2x^2-3x+2}-\sqrt{6x^2-10x+5}-1$

**Đặt** $2\sqrt{2x^2-3x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{6x^2-10x+5}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2 - b^2 = 2x^2 - 2x + 3$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PTcó 3 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2$

**2) Giải phương trình**

$$\sqrt{2x^2-3x+2} - x - 4 + \frac{16x+16}{x^2+x+6} = 0$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=-2; x=1; x=2$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2 - x + 2 - 2\sqrt{2x^2-3x+2}$

**Biểu thức nữa cần tìm(nếu dùng Casio với 2 nghiệm xấu) là** $x + 2 - \sqrt{2x^2-3x+2}$

$$\sqrt{2x^2-3x+2} - x - 4 + \frac{16x+16}{x^2+x+6} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+2} = \frac{x^3+5x^2-6x+8}{x^2+x+6}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+6)\sqrt{2x^2-3x+2} = x^3+5x^2-6x+8$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^2-3x+2} - (x^2-x+2)\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+2} - x - 2\right) = 0$$

**PTcó 5 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2; x=\frac{7\pm\sqrt{57}}{2}$

**Muốn PT nhìn phức tạp ta nhân liên hợp và qui đồng được :**

**Giải phương trình**

$$\frac{x^2-11x-14}{x+4+\sqrt{2x^2-3x+4}} + \frac{16x+16}{x^2+x+6} = 0$$

**PTcó 5 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2; x=\frac{7\pm\sqrt{57}}{2}$

**3) Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2-10x+5} - x - 6 + \frac{12x+6}{x^2+2} = 0$$

**Hướng dẫn.**

**Ta nhẩm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=-2; x=1; x=2$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{6x^2-10x+5}$

$$\sqrt{6x^2-10x+5}-x-6+\frac{12x+6}{x^2+2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{6x^2-10x+5}=\frac{x^3+6x^2-10x+6}{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)\sqrt{6x^2-10x+5}=x^3+6x^2-10x+6$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x+1+x+1)\sqrt{6x^2-10x+5}=x^3+1+6x^2-10x+5$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^2-10x+5}-(x^2-x+1)\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+2}-x-1\right)=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2; x=\frac{2}{5}$

**Muốn PT nhìn phức tạp ta nhân liên hợp và qui đồng được:**

**Giải phương trình**

$$\frac{5x^2-22x-31}{x+6+\sqrt{6x^2-10x+5}}+\frac{12x+6}{x^2+2}=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-2; x=1; x=2; x=\frac{2}{5}$

# *PHƯƠNG TRÌNH DÙNG CASIO HỖ TRỢ*

***Chuyên đề 2 TÌM BIỂU THỨC LIÊN HỢP***

**Chuyên đề này xin được giới thiệu các phương trình dùng máy tính cầm tay tìm biểu thức liên hợp có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt[k]{P(x)}$ **,với a,b,c là các số nguyên. Khi a=0 là trường hợp quen thuộc!**

**Sau đây là các thí dụ đơn giản của dạng này**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{6x^2-6x+4}=5x+\frac{2}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{6x^2-6x+4}=\frac{5x^2-4x+2}{x}(*)$$

**Do** $5x^2-4x+2>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^4-2x^3+2x^2}+\sqrt{6x^4-6x^3+4x^2}=5x^2-4x+2$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{x^4-2x^3+2x^2}$ **và** $3x^2-2x+1-\sqrt{6x^4-6x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$2\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{6x^2-6x+4}=7x+\frac{3}{x}-6$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{6x^2-6x+4}=\frac{7x^2-6x+3}{x}(*)$$

**Do** $7x^2-6x+3>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^4-2x^3+2x^2}+\sqrt{6x^4-6x^3+4x^2}=7x^2-6x+3$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{x^4-2x^3+2x^2}$

**và** $3x^2-2x+1-\sqrt{6x^4-6x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$2\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{5x^2-6x+4}{x+\sqrt{6x^2-6x+4}}=6x+\frac{3}{x}-6$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$\sqrt{8-2x}+\sqrt{12x^2-18x+24}=6x+\frac{8}{x}-8$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{8-2x}+\sqrt{12x^2-18x+24}=\frac{6x^2-8x+8}{x}(*)$$

**Do** $6x^2-8x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*) \Leftrightarrow \sqrt{8x^2-2x^3}+\sqrt{12x^4-18x^3+24x^2}=6x^2-8x+8$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-4x+4-\sqrt{8x^2-2x^3}$ **và** $4x^2-4x+4-\sqrt{12x^4-18x^3+24x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=2;\ x=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$$2\sqrt{8-2x}+\sqrt{12x^2-18x+24}=8x+\frac{12}{x}-12$$

**Hướng dẫn.**

$$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{8-2x}+\sqrt{12x^2-18x+24}=\frac{8x^2-12x+12}{x}(*)$$

**Do** $6x^2-8x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*) \Leftrightarrow \sqrt{8x^2-2x^3}+\sqrt{12x^4-18x^3+24x^2}=8x^2-12x+12$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-4x+4-\sqrt{8x^2-2x^3}$ **và** $4x^2-4x+4-\sqrt{12x^4-18x^3+24x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=2;\ x=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$2\sqrt{8-2x}+\frac{3x^2-18x+24}{3x+\sqrt{12x^2-18x+24}}=5x+\frac{12}{x}-12$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=2;\ x=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}$

**Thí dụ 5 Giải phương trình**

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{5x^2-3x+2}=4x+\frac{1}{x}-2$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{5x^2-3x+2}=\frac{4x^2-2x+1}{x}(*)$$

**Do** $4x^2-2x+1>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{x^4-x^3+x^2}+2\sqrt{5x^4-3x^3+2x^2}=8x^2-4x+2$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2-2x+1-2\sqrt{x^4-x^3+x^2}$ **và** $5x^2-2x+1-2\sqrt{5x^4-3x^3+2x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{5}$

**Thí dụ 6 Giải phương trình**

$$3\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{5x^2-3x+2}=7x+\frac{2}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2-x+1}+2\sqrt{5x^2-3x+2}=\frac{14x^2-8x+4}{x}(*)$$

**Do** $14x^2-8x+4>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow 6\sqrt{x^4-x^3+x^2}+2\sqrt{5x^4-3x^3+2x^2}=8x^2-4x+2$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2-2x+1-2\sqrt{x^4-x^3+x^2}$

**và** $5x^2-2x+1-2\sqrt{5x^4-3x^3+2x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{5}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$3\sqrt{x^2-x+1}+\frac{4x^2-3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+2}-x}=8x+\frac{2}{x}-4$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{5}$

**Thí dụ 7 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x^2-2x+4}=3x+\frac{6}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{2x-2}+\sqrt{3x^2-2x+4}=\frac{3x^2-4x+6}{x}(*)$$

**Do** $3x^2-4x+6>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\sqrt{2x^3-2x^2}+\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}=3x^2-4x+6$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{2x^3-2x^2}$ **và** $2x^2-2x+3-\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 8 Giải phương trình**

$$3\sqrt{2x-2}+2\sqrt{3x^2-2x+4}=7x+\frac{15}{x}-10$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow3\sqrt{2x-2}+2\sqrt{3x^2-2x+4}=\frac{7x^2-10x+15}{x}(*)$$

**Do** $7x^2-10x+15>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow3\sqrt{2x^3-2x^2}+2\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}=7x^2-10x+15$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{2x^3-2x^2}$ **và** $2x^2-2x+3-\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$\frac{3x^2-6x+6}{x+\sqrt{2x-2}}+\frac{2x^2+4x-8}{2x+\sqrt{3x^2-2x+4}}+\frac{15}{x}-10=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 9 Giải phương trình**

$$\sqrt{8x^2-6x+10}+\sqrt{3x^2-2x+4}=5x+\frac{6}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{8x^2-6x+10}+\sqrt{3x^2-2x+4}=\frac{5x^2-4x+6}{x}(*)$$

**Do** $5x^2-4x+6>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\sqrt{8x^4-6x^3+10x^2}+\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}=5x^2-4x+6$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2-2x+3-\sqrt{8x^4-6x^3+10x^2}$ **và** $2x^2-2x+3-\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 10 Giải phương trình**

$$\sqrt{8x^2-6x+10}+2\sqrt{3x^2-2x+4}=7x+\frac{9}{x}-6$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{8x^2-6x+10}+2\sqrt{3x^2-2x+4}=\frac{7x^2-6x+9}{x}(*)$$

**Do** $7x^2-6x+9>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\sqrt{8x^4-6x^3+10x^2}+2\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}=7x^2-6x+9$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2-2x+3-\sqrt{8x^4-6x^3+10x^2}$ **và** $2x^2-2x+3-\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$\frac{4x^2-4x+8}{\sqrt{3x^2-2x+4}-x}-\frac{x^2+6x-10}{3x+\sqrt{8x^2-6x+10}}=6x+\frac{9}{x}-6$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=3;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 11 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2-x+5}+\sqrt{8x^2-5x+13}=5x+\frac{8}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{3x^2-x+5}+\sqrt{8x^2-5x+13}=\frac{5x^2-4x+8}{x}(*)$$

**Do** $5x^2-4x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\sqrt{3x^4-x^3+5x^2}+\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}=5x^2-4x+8$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+4-\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}$ **và** $3x^2-2x+4-\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=4;\ x=1+\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 12 Giải phương trình**

$$2\sqrt{3x^2-x+5}+\sqrt{8x^2-5x+13}=7x+\frac{12}{x}-6$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-x+5}+\sqrt{8x^2-5x+13}=\frac{7x^2-6x+12}{x}(*)$$

**Do** $5x^2-4x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^4-x^3+5x^2}+\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}=7x^2-6x+12$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+4-\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}$ **và** $3x^2-2x+4-\sqrt{8x^4-5x^3+13x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=4;\ x=1+\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 13 Giải phương trình**

$$\sqrt{-2x^2-10x+17}+\sqrt{(x-3)(3x-7)}=5x+\frac{4}{x}-6$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{-2x^2-10x+17}+\sqrt{(x-3)(3x-7)}=\frac{5x^2-6x+4}{x}(*)$$

**Do** $5x^2-6x+4>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\sqrt{-2x^4-10x^3+17x^2}+\sqrt{x^2(x-3)(3x-7)}=5x^2-6x+4$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-3x+2-\sqrt{-2x^4-10x^3+17x^2}$ **và** $3x^2-3x+2-\sqrt{x^2(x-3)(3x-7)}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\frac{1}{3};\ x=\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 14 Giải phương trình**

$$3\sqrt{-2x^2-10x+17}+\sqrt{(x-3)(3x-7)}=9x+\frac{8}{x}-12$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{-2x^2-10x+17}+\sqrt{(x-3)(3x-7)}=\frac{9x^2-12x+8}{x}(*)$$

**Do** $9x^2-12x+8>0$ **nên** $x>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow3\sqrt{-2x^4-10x^3+17x^2}+\sqrt{x^2(x-3)(3x-7)}=9x^2-12x+8$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-3x+2-\sqrt{-2x^4-10x^3+17x^2}$ **và** $3x^2-3x+2-\sqrt{x^2(x-3)(3x-7)}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\frac{1}{3};\ x=\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 15 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x^2-8x+6}+\sqrt{9x^2-12x+8}=5x+\frac{2}{x}-4$$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-8x+6}+\sqrt{9x^2-12x+8}=\dfrac{5x^2-4x+2}{x} (*)$

**Do** $5x^2-4x+2>0$ **nên** $x>0$

$PT(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}+\sqrt{9x^4-12x^3+8x^2}=5x^2-4x+2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}$ **và** $3x^2-2x+1-\sqrt{9x^4-12x^3+8x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**Thí dụ 16 Giải phương trình**

$2\sqrt{4x^2-8x+6}+\sqrt{9x^2-12x+8}=7x+\dfrac{3}{x}-6$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2-8x+6}+\sqrt{9x^2-12x+8}=\dfrac{7x^2-6x+3}{x} (*)$

**Do** $7x^2-6x+3>0$ **nên** $x>0$

$PT(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}+\sqrt{9x^4-12x^3+8x^2}=7x^2-6x+3$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}$ **và** $3x^2-2x+1-\sqrt{9x^4-12x^3+8x^2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**Thí dụ 17 Giải phương trình**

$\sqrt{4x^2-4x+10}+\sqrt{9x^2-6x+14}=5x+\dfrac{4}{x}-2$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-4x+10}+\sqrt{9x^2-6x+14}=\dfrac{5x^2-2x+4}{x} (*)$

**Do** $5x^2-2x+4>0$ **nên** $x>0$

$PT(*) \Leftrightarrow \sqrt{4x^4-4x^3+10x^2}+\sqrt{9x^4-6x^3+14x^2}=5x^2-2x+4$

**Cần tìm thêm nghiệm ngoại lai từ đó có**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}$ **và** $3x^2-x+2-\sqrt{9x^4-6x^3+14x^2}$

**PTcó nghiệm duy nhất** $x=-2+2\sqrt{2}$

**Thí dụ 18 Giải phương trình**

$3\sqrt{4x^2-4x+10}+\sqrt{9x^2-6x+14}=9x+\frac{8}{x}-4$

**Hướng dẫn.**

$PT \Leftrightarrow 3\sqrt{4x^2-4x+10}+\sqrt{9x^2-6x+14}=\frac{9x^2-4x+8}{x}(*)$

**Do** $9x^2-4x+8>0$ **nên** $x>0$

$PT(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{4x^4-4x^3+10x^2}+\sqrt{9x^4-6x^3+14x^2}=9x^2-4x+8$

**Cần tìm thêm nghiệm ngoại lai từ đó có**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{4x^4-8x^3+6x^2}$ **và** $3x^2-x+2-\sqrt{9x^4-6x^3+14x^2}$

**PTcó nghiệm duy nhất** $x=-2+2\sqrt{2}$

**Thí dụ 19 Giải phương trình**

$\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{5x^2+2x}=2x^2+2x+3$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2-3}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+2x}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp:**

**a)Giải phương trình** $\frac{\sqrt{3x^2-3}}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+2}{\sqrt{5x^2+2x}}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{5x^2+2x}\left(\sqrt{3x^2-3}-x^2-x-1\right)+\left(\sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2\right)(x^2+x+1)=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**b)Giải phương trình** $\sqrt{\sqrt{3x^2-3}+5x+8}+\sqrt{\sqrt{5x^2+2x}+5x+7}=2x+6$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{3x^2-3}+5x+8}-(x+3)+\sqrt{\sqrt{5x^2+2x}+5x+7}-(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2-3}-(x^2+x+1)}{MS1}+\frac{\sqrt{5x^2+2x}-(x^2+x+2)}{MS2}=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 20 Giải phương trình**

$$3\sqrt{3x^2-3}+2\sqrt{5x^2+2x}=5x^2+5x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2-3}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+2x}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 21 Giải phương trình**

$$2\sqrt{3x^2-3}+\frac{x^2-2x-1}{\sqrt{5x^2+2x}-2x-1}=3x^2+5x+5$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-3}+\frac{(\sqrt{5x^2+2x}-2x-1)(\sqrt{5x^2+2x}+2x+1)}{\sqrt{5x^2+2x}-2x-1}=3x^2+5x+5$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2-3}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+2x}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 22 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{9x^2-2x+2}=4x^2-2x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$ **và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Nâng cấp**

**1)Giải phương trình** $\dfrac{\sqrt{5x^2-1}}{2x^2-x+1}=\dfrac{2x^2-x+2}{\sqrt{9x^2-2x+2}}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{5x^2-1}\left(\sqrt{9x^2-2x+2}-2x^2+x-2\right)+\left(\sqrt{5x^2-1}-2x^2+x-1\right)(2x^2-x+2)=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**2)Giải phương trình** $\sqrt{\dfrac{9x^2-2x+2}{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\dfrac{2x^2-x+2}{2}$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{\frac{9x^2-2x+2}{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\frac{2x^2-x+2}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9x^2-2x+2}}{\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\frac{2x^2-x+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2-2x+2}\left(4-\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}\right)+\left(\sqrt{9x^2-2x+2}-2x^2+x-2\right)\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}=0$$

**Nhân liên hợp PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Thí dụ 23 Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2-1}+3\sqrt{9x^2-2x+2}=10x^2-5x+8$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$ **và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-2x+2}=\frac{11x^2+2x-6}{6x^2-3x+4}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-2x+2}=\frac{\left(2\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-2x+2}\right)\left(2\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{9x^2-2x+2}\right)}{6x^2-3x+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-2x+2}=0 \\ 2\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{9x^2-2x+2}=6x^2-3x+4(*) \end{array}\right.$$

**Giải (*) có biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$ **và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=1;\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}};x=\frac{-1\pm\sqrt{67}}{11}$

**Thí dụ 24 Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2-1}+\frac{5x^2-2x+2}{\sqrt{9x^2-2x+2}-2x}=6x^2-x+4$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2-1}+\frac{\left(\sqrt{9x^2-2x+2}-2x\right)\left(\sqrt{9x^2-2x+2}+2x\right)}{\sqrt{9x^2-2x+2}-2x}=6x^2-x+4$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$ **và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Thí dụ 25 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x^2-1}+2\sqrt{x^2+x+1}=2x^2+4x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**Nâng cấp:Giải phương trình** $\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}\left(2\sqrt{x^2+x+1}-x^2-2x-3\right)+\left(\sqrt{2x^2-1}-x^2-2x-2\right)\left(x^2+2x+3\right)=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**Thí dụ 26 Giải phương trình**

$$3\sqrt{2x^2-1}+2\sqrt{x^2+x+1}=4x^2+8x+9$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$3\sqrt{2x^2-1}-2\sqrt{x^2+x+1}=\frac{14x^2-4x-13}{4x^2+8x+9}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2-1}-2\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\left(3\sqrt{2x^2-1}-2\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(3\sqrt{2x^2-1}+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}{4x^2+8x+9}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\sqrt{2x^2-1}-2\sqrt{x^2+x+1}=0\\ 3\sqrt{2x^2-1}+2\sqrt{x^2+x+1}=4x^2+8x+9(*)\end{array}\right.$$

**Giải (*) có biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4};x=\frac{2\pm\sqrt{186}}{14}$

**Thí dụ 27 Giải phương trình**

$$\frac{3x^2+6x-6}{\sqrt{2x^2-1}-x+1}+\frac{8x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-1}=4x^2+9x+7$$

**Hướng dẫn.**

$$Pt \Leftrightarrow 3.\frac{(\sqrt{2x^2-1}-x+1)(\sqrt{2x^2-1}+x-1)}{\sqrt{2x^2-1}-x+1}+\frac{(2\sqrt{x^2+x+1}+2x-1)(2\sqrt{x^2+x+1}-2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}+2x-1}=4x^2+9x+7$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**Thí dụ 28 Giải phương trình**

$\sqrt{3x^2+9}+\sqrt{5x^2+6x+16}=2x^2+6x+7$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+9}$ **và** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+3x+16}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{10}$

**2)Giải phương trình** $\sqrt{\dfrac{9x^2-2x+2}{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\dfrac{2x^2-x+2}{2}$

**Hướng dẫn.**

$\sqrt{\dfrac{9x^2-2x+2}{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\dfrac{2x^2-x+2}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{9x^2-2x+2}}{\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}}=\dfrac{2x^2-x+2}{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{9x^2-2x+2}\left(4-\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}\right)+\left(\sqrt{9x^2-2x+2}-2x^2+x-2\right)\sqrt{(x-1)(2x^3-1)+4}=0$

**Nhân liên hợp PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Thí dụ 29 Giải phương trình**

$2\sqrt{3x^2+9}+\sqrt{5x^2+6x+16}=3x^2+9x+10$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+9}$ **và** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+6x+16}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{10}$

**Thí dụ 30 Giải phương trình**

$3\sqrt{3x^2+9}+\dfrac{x^2+2x+15}{\sqrt{5x^2+6x+16}-2x-1}=4x^2+14x+14$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+9}$ **và** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+6x+16}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{10}$

**Thí dụ 31 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+x+16}+\sqrt{3x^2+7x+9}=2x^2-6x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-3x+4-\sqrt{5x^2+x+16}$ **và** $x^2-3x+3-\sqrt{3x^2+7x+9}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=2+\sqrt[3]{17}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$\frac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{5x+\sqrt{x}+16}}+\frac{1}{3\sqrt{x}+\sqrt{3x+7\sqrt{x}+9}}=\frac{2x+7}{x^2+7x+12}$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=(2+\sqrt[3]{17})^2$

**Thí dụ 32 Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2+x+16}+3\sqrt{3x^2+7x+9}=5x^2-15x+17$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-3x+4-\sqrt{5x^2+x+16}$ **và** $x^2-3x+3-\sqrt{3x^2+7x+9}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=2+\sqrt[3]{17}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$2\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{5x^2+x+16}=\frac{7x^2+27x+20}{3x^2-9x+10}$$

**Hướng dẫn.**

$$pt\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{5x^2+x+16}=\frac{\left(2\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{5x^2+x+16}\right)\left(2\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{5x^2+x+16}\right)}{3x^2-9x+10}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{5x^2+x+16}=0\\2\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{5x^2+x+16}=3x^2-9x+10(*)\end{array}\right.$$

**Giải (*) có biểu thức cần tìm là** $x^2-3x+3-\sqrt{3x^2+7x+9}$ **và** $x^2-3x+4-\sqrt{5x^2+x+16}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=1;\ x=2+\sqrt[3]{17};x=-\dfrac{20}{7};x=0$

**Thí dụ 33 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2+9x+16}+\sqrt{3x^2+3x+9}=2x^2+6x+7$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+9x+16}$ **và** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+3x+9}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{7}$

**Thí dụ 34 Giải phương trình**

$2\sqrt{5x^2+9x+16}+\sqrt{3x^2+3x+9}=3x^2+9x+11$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+9x+16}$ **và** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+3x+9}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{7}$

**Thí dụ 35 Giải phương trình**

$2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-6x+6}=\dfrac{4x^2-2x-2}{3x^2-6x+7}$

**Hướng dẫn.**

$$pt\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-6x+6}=\frac{\left(2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-6x+6}\right)\left(2\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2-6x+6}\right)}{3x^2-6x+7}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2-6x+6}=0\\2\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2-6x+6}=3x^2-6x+7(*)\end{array}\right.$$

**Giải (*) có biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+3-\sqrt{4x^2-6x+6}$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2};x=-\dfrac{1}{2}$

**Thí dụ 36 Giải phương trình**

$\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2-6x+6}=2x^2-4x+5$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+3-\sqrt{4x^2-6x+6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp:**

**a)Giải phương trình**

$$\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-6\sqrt{x}+6}}=\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=(1+\sqrt[3]{2})^2$

**b)Giải phương trình**

$$\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2}+\sqrt{\sqrt{4x^2-6x+6}+4x-2}=2x+1(*)$$

**Hướng dẫn.**

**Ta dùng Casio tìm được nghiệm đẹp của PT là** $x=1; x=2,25992105$

**biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2}-x$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{4x^2-6x+6}+4x-2}-(x+1)$

**ĐKXĐ:** $\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2\geq 0(1)$ **và** $\sqrt{4x^2-6x+6}+4x-2\geq 0(2)$

**Có:** $(1)\Leftrightarrow x\geq\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ $(2)\Leftrightarrow x\geq\frac{-1}{6}$ **suy ra** $x\geq\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+2x-2}+x>0$

$\sqrt{\sqrt{4x^2-6x+6}+4x-2}+(x+1)>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-(x^2-2x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{4x^2-6x+4}-(x^2-2x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 37 Giải phương trình**

$\sqrt{2x^2-2x+1}+3\sqrt{4x^2-6x+6}=4x^2-8x+11$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+3-\sqrt{4x^2-6x+6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$$\frac{2}{2\sqrt{x}+\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}}+\frac{3}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-6\sqrt{x}+6}}=\frac{5x+12}{x^2+5x+6}$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=(1+\sqrt[3]{2})^2$

**Thí dụ 38 Giải phương trình**

$$\frac{2x^2-2x-3}{\sqrt{2x^2-2x+1}+2}+\frac{6x^2-12x+12}{\sqrt{4x^2-6x+6}+x}=3x^2-8x+6$$

**Hướng dẫn.**

$$PT\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{2x^2-2x+1}-2)(\sqrt{2x^2-2x+1}+2)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+2}$$
$$+2.\frac{(\sqrt{4x^2-6x+6}-x)(\sqrt{4x^2-6x+6}+x)}{\sqrt{4x^2-6x+6}+x}=3x^2-8x+6$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+3-\sqrt{4x^2-6x+6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 39 Giải phương trình**

$3\sqrt{2x^2-2x+1}+4\sqrt{2x-2}=7x^2-14x+10$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+1-\sqrt{2x-2}$

**Chú ý :x=1 thì** $x^2-2x+1=\sqrt{2x-2}=0$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Nâng cấp**

**a)Giải phương trình:** $2x^2-6x+15-\sqrt{2x^2-2x+1}=\dfrac{34x-94}{x^2-7}$

**Hướng dẫn.**

$$pt\Leftrightarrow(x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1})(2x^2-2x-5+\sqrt{2x^2-2x+1})=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=1+\sqrt[3]{2}; x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

**b)Giải phương trình**

$$\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+4x-1}+\sqrt{\sqrt{2x-2}+2x-1}=2x+1(*)$$

**Hướng dẫn.ĐK:** $x\ge 1$

**Ta dùng Casio tìm được nghiệm đẹp của PT là** $x=1; x=2,25992105$

**biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{2x-2}+2x-1}-x$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+4x-1}-(x+1)$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{2x-2}+2x-1}+x>0$

$$\sqrt{\sqrt{2x^2-2x+1}+4x-1}+(x+1)>0$$

$$PT(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-(x^2-2x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{2x-2}-(x^2-2x+1)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 40 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+3x+8}+\sqrt{3x^2+x+5}=2x^2+2x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+3x+8}$ **và** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+x+5}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 41 Giải phương trình**

$$2\sqrt{5x^2+3x+8}+3\sqrt{3x^2+x+5}=5x^2+5x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+3x+8}$ **và** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+x+5}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 42 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+3x+8}{\sqrt{5x^2+3x+8}-2x}+\frac{4x^2-2x+8}{\sqrt{3x^2+x+5}-x-1}=3x^2+7x+6$$

**Hướng dẫn.**

$$Pt\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{5x^2+3x+8}-2x)(\sqrt{5x^2+3x+8}+2x)}{\sqrt{5x^2+3x+8}-2x}$$
$$+2.\frac{(\sqrt{3x^2+x+5}-x-1)(\sqrt{3x^2+x+5}+x+1)}{\sqrt{3x^2+x+5}-x-1}=3x^2+7x+6$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+3x+8}$ **và** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+x+5}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 43 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x^2+15x+23}+\sqrt{4x^2+23x+34}=2x^2+8x+11$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+4x+5-\sqrt{2x^2+15x+23}$

**và** $x^2+4x+6-\sqrt{4x^2+23x+34}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=\sqrt[3]{7}-2$

**Thí dụ 44 Giải phương trình**

$2\sqrt{2x^2+15x+23}+\sqrt{4x^2+23x+34}=3x^2+12x+16$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+4x+5-\sqrt{2x^2+15x+23}$

**và** $x^2+4x+6-\sqrt{4x^2+23x+34}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=\sqrt[3]{7}-2$

**Thí dụ 45 Giải phương trình**

$2\sqrt{4x^2+2x+1}+\sqrt{6x^2+4x+4}=3x^2+3x+4$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{4x^2+2x+1}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{6x^2+4x+4}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0;\ x=-1\pm\sqrt{2}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$2\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{6x^2+4x+4}=\dfrac{10x^2+4x}{3x^2+3x+4}$

**Hướng dẫn.**

$$pt \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{6x^2+4x+4}=\frac{\left(2\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{6x^2+4x+4}\right)\left(2\sqrt{4x^2+2x+1}+\sqrt{6x^2+4x+4}\right)}{3x^2+3x+4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{4x^2+2x+1}-\sqrt{6x^2+4x+4}=0 \\ 2\sqrt{4x^2+2x+1}+\sqrt{6x^2+4x+4}=3x^2+3x+4(*) \end{array}\right.$$

**Giải (*) có biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{4x^2+2x+1}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{6x^2+4x+4}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=0; x=-\dfrac{2}{5}; x=-1\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 46 Giải phương trình**

$2\sqrt{4x^2+2x+1}+3\sqrt{6x^2+4x+4}=5x^2+5x+8$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+2x+1}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+4x+4}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=0;\ x=-1\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 47 Giải phương trình**

$$\sqrt{7x^2+9}+\sqrt{9x^2+6x+16}=2x^2+6x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+3-\sqrt{7x^2+9}$ **và** $3x^2+3x+4-\sqrt{9x^2+6x+16}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{\dfrac{81-\sqrt{6369}}{9}}-\sqrt[3]{\dfrac{81+\sqrt{6369}}{9}}$

**Thí dụ 48 Giải phương trình**

$$\sqrt{4x+13}+\sqrt{4x^2+6x+18}=4x^2+2x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+2-\sqrt{4x+13}$ **và** $2x^2+x+3-\sqrt{4x^2+6x+18}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=\dfrac{\sqrt[3]{9+6\sqrt{3}}-\sqrt[3]{9-6\sqrt{3}}}{2}$

**Thí dụ 49 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x+14}+\sqrt{4x^2+4x+17}=4x^2+2x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{2x+14}$ **và** $2x^2+x+2-\sqrt{4x^2+4x+17}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{-4+\sqrt[3]{24\sqrt{78}-181}-\sqrt[3]{24\sqrt{78}+181}}{6}$

**Thí dụ 50 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x^2+7x+9}=2x^2+4x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{3x+4}$ **và** $x^2+2x+3-\sqrt{2x^2+7x+9}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-1$

**Thí dụ 51 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+10x+7}+\sqrt{-12x^3-2x+12}=4x^2+3x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+2-\sqrt{5x^2+10x+7}$ **và** $2x^2+3-\sqrt{-12x^3-2x+12}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

**Thí dụ 52 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2-7x+7}+\sqrt{8x^3-x^2-3x+7}=4x^2-2x+2$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+1-\sqrt{3x^2-7x+7}$ **và** $2x^2+1-\sqrt{8x^3-x^2-2x+7}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 53 Giải phương trình**

$$\sqrt{18x^2+5x-5}+\sqrt{64x^2+16x-23}=6x^2+3x+2$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{18x^2+5x-5}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{64x^2+16x-23}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

**Thí dụ 54 Giải phương trình**

$$2\sqrt{18x^2+5x-5}+\sqrt{64x^2+16x-23}=8x^2+4x+3$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{18x^2+5x-5}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{64x^2+16x-23}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

**Thí dụ 55 Giải phương trình**

$\sqrt{14x^2+11x+6}+\sqrt{32x^2+32x+9}=6x^2+3x+3$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+2-\sqrt{14x^2+11x+6}$ **và** $4x^2+2x+1-\sqrt{32x^2+32x+9}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};\ \ x=-1; x=\dfrac{-1}{2}$

**Thí dụ 56 Giải phương trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{24x^2+36x+17}=6x^2+3x+2$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$

**và** $4x^2+2x+1-\sqrt{24x^2+36x+17}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 57 Giải phương trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{(x+1)(8x^2+21x+17)}=6x^2+4x+2$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$ **và** $4x^2+3x+1-\sqrt{(x+1)(8x^2+21x+17)}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 58 Giải phương trình**

$\sqrt{8x^2+10x+5}+\sqrt{8x^3+37x^2+44x+20}=6x^2+4x+3$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{8x^2+10x+5}$

**và** $4x^2+3x+2-\sqrt{8x^3+37x^2+44x+20}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

**Thí dụ 59 Giải phương trình**

$$2\sqrt{x^4+1}+\sqrt{9x^4+2x^3+4x^2+4}=5x^2+2x+4$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+2-2\sqrt{x^4+1}$

**và** $3x^2+x+2-\sqrt{9x^4+2x^3+4x^2+4}$

**PTcó 3 nghiệm** $x=1$ ; $x=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$

**Thí dụ 60 Giải phương trình**

$$\frac{(x+1)\sqrt{2x-1}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}{2x^2-3x+5}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-(x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $x^2-2x+3-2\sqrt{2x^2-2x+1}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$**;** $x=\frac{3+\sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}+\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}{3}$

**Thí dụ 61 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x-1}=\frac{2x^2+3}{x+1+\sqrt{3x^2+2x+4}}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-(x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+2x+4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$**;** $x=\frac{3+\sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}+\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}}{3}$

**Thí dụ 62 Giải phương trình**

$$\frac{(3x+1)\sqrt{2x-1}+\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}}{4x^2+x+1}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-(3x+1)\sqrt{2x-1}$

**và** $2x^2-\sqrt{14x^3-2x^2-6x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{5+\sqrt[3]{359-12\sqrt{78}}+\sqrt[3]{359+12\sqrt{78}}}{6}$

**Thí dụ 63 Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{2x^2-2x+4}+\sqrt{2x^3+3x^2+4}}{2x^2+x+2}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+1-\sqrt{2x^2-2x+4}$

**và** $x^2+x+1-\sqrt{2x^3+3x^2+4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{9\sqrt{17}-37}-\sqrt[3]{9\sqrt{17}-37}}{3}$

**Thí dụ 64 Giải phương trình**

$$\frac{(x+1)\sqrt{3x+1}+\sqrt{-x^3+5x^2-x-2}}{2x^2+3}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-(x+1)\sqrt{3x+1}$

**và** $x^2-x+1-\sqrt{-x^3+5x^2-x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{81-3\sqrt{633}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{81+3\sqrt{633}}{2}}}{3}$

**Thí dụ 65 Giải phương trình**

$$\frac{(x+1)\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^3+4x^2+x-2}}{2x^2+x+3}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-(x+1)\sqrt{3x+1}$

**và** $x^2+1-\sqrt{x^3+4x^2+x-2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{\sqrt[3]{27-\sqrt{633}}+\sqrt[3]{27+\sqrt{633}}}{\sqrt[3]{18}}$

**Thí dụ 66 Giải phương trình**

$$\frac{(x+2)\sqrt{3x+1}+\sqrt{-x^3+4x^2+10x-4}}{4x^2+x+4}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+3-(x+2)\sqrt{3x+1}$ **và** $2x^2+1-\sqrt{-x^3+4x^2+10x-4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$; $x=\dfrac{-5+\sqrt[3]{5(281+18\sqrt{249})}-\sqrt[3]{5(281-18\sqrt{249})}}{12}$

**Thí dụ 67 Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases}x^2+2y^2=xy^2+4\\(x+2)\sqrt{3x^2+4}+3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}=9x^2+y^2\end{cases}$$

**Hướng dẫn.**

**Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với** $x=2$ **hoặc** $x=y^2-2\geq -2$

**Với x=2 các bạn tự xử lí trường hợp dễ này**

**Với** $x=y^2-2\geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta được**

$$(x+2)\sqrt{3x^2+4}+3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}=9x^2+x+2(*)$$

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2+x+2-(x+2)\sqrt{3x^2+4}$ **và** $2x^2-\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x=2$; $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{183}-31}{4}}-\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{183}+31}{4}}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

**Thí dụ 68 Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2-y^2}{\sqrt{y^4-2y^2+2}} = 0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{2x^2+16x+41} = 3x^2+3y^2+5 \end{cases}$$

**Hướng dẫn.**

**Sử dụng Hàm đặc trưng có**

**Phương trình thứ nhất của hệ tương đương** $x = y^2 - 2 \geq -2$

**Với** $x = y^2 - 2 \geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta được**

$$(x+2)\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{2x^2+16x+41} = 3x^2+3x+11 (*)$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+6-(x+2)\sqrt{3x^2+13}$ **và** $x^2+5-\sqrt{2x^2+16x+41}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x = 2$; $x = \dfrac{-2+2\sqrt[3]{3\sqrt{57}-1}-2\sqrt[3]{3\sqrt{57}+1}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

**Thí dụ 69 Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + x - y^2 + 2 = 0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{4x^2+10x+67} = 3x^2+3x+15 \end{cases}$$

**Hướng dẫn.**

**Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với** $x = 1$ **hoặc** $x = y^2 - 2 \geq -2$

**Với x=1 các bạn tự xử lí trường hợp dễ này**

**Với** $x = y^2 - 2 \geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta được**

$$(x+2)\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{4x^2+10x+67} = 3x^2+3x+15 (*)$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+7-(x+2)\sqrt{3x^2+13}$ **và** $x^2+8-\sqrt{4x^2+10x+67}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x=1$**;** $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{17+9\sqrt{681}}-\sqrt[3]{17-9\sqrt{681}}}{3}$

**Đến đây các bạn tự giải tiếp**

**Thí dụ 70 Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{12x^3+9x^2+6x+4}}{2x^2+1}=3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $3x^2-x+1-\sqrt{3x^2+1}$

**và** $3x^2-x+2-\sqrt{12x^3+9x^2+6x+4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=0$**;** $x=\dfrac{2+\sqrt[3]{53+9\sqrt{41}}-\sqrt[3]{53-9\sqrt{41}}}{9}$

**Thí dụ 71 Giải phương trình**

$$3\sqrt{4x^3+5x^2+7}=2x^4+6x^2+4x$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+x+1-\sqrt{4x^3+5x^2+7}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x=1$**;** $x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{\dfrac{9\sqrt{57}-67}{4}}-\sqrt[3]{\dfrac{9\sqrt{57}-67}{4}}}{3}$

**☺Thí dụ 72 Giải phương trình**

$$\sqrt{x+\sqrt{3x^2-3}}+\sqrt{3x^2+7x+2+\sqrt{5x^2+2x}}=3|x+1|$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2-3}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+2x}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

$$PT\Leftrightarrow\sqrt{x+\sqrt{3x^2-3}}-|x+1|+\sqrt{3x^2+7x+2+\sqrt{5x^2+2x}}-2|x+1|=0$$

**☺Thí dụ 73 Giải phương trình**

$$\sqrt{2x^2+5x+\sqrt{5x^2-1}}+\sqrt{2x^2-3x-1+\sqrt{9x^2-2x+2}}=|2x-1|+|2x+1|$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$ **và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

$$Pt\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+5x+\sqrt{5x^2-1}}-|2x+1|+\sqrt{2x^2-3x-1+\sqrt{9x^2-2x+2}}-|2x-1|=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**☺Thí dụ 74 Giải phương trình**

$$\sqrt[3]{(x+1)^2-\sqrt{2x^2-1}}+\sqrt[3]{x^2+2x+11-2\sqrt{x^2+x+1}}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

$$PT\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+1)^2-\sqrt{2x^2-1}}+1+\sqrt[3]{x^2+2x+11-2\sqrt{x^2+x+1}}-2=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**☺Thí dụ 75 Giải phương trình**

$$\sqrt[3]{x^2+3x+4-\sqrt{3x^2+9}}+\sqrt{x^2+3x+13-\sqrt{5x^2+3x+16}}=4$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+3-\sqrt{3x^2+9}$ **và** $x^2+3x+4-\sqrt{5x^2+3x+16}$

$$pt\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2+3x-5-\sqrt{3x^2+9}}-1+\sqrt{x^2+3x+13-\sqrt{5x^2+3x+16}}-3=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=0;\ x=-2-\sqrt[3]{10}$

**☺Thí dụ 76 Giải phương trình**

$$\left|2\sqrt{5x^2-1}-x^2\right|+\left|2\sqrt{9x^2-2x+2}-x^2-1\right|=6x^2-4x+5$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2 - x + 1 - \sqrt{5x^2 - 1}$ **và** $2x^2 - x + 2 - \sqrt{9x^2 - 2x + 2}$

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{\left(2\sqrt{5x^2 - 1} - x^2\right)^2} - (3x^2 - 2x + 2) + \sqrt{\left(2\sqrt{9x^2 - 2x + 2} - x^2 - 1\right)^2} - (3x^2 - 2x + 3) = 0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x = 1;\ x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**☺Thí dụ 77 Giải phương trình**

$$\left(3 + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}\right)\left(2 + \sqrt{4x^2 - 6x + 6}\right) = \left(x^2 - 2x + 5\right)^2$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2 - 2x + 2 - \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ **và** $x^2 - 2x + 3 - \sqrt{4x^2 - 6x + 6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x = 1;\ x = 1 + \sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 78 Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2 + x + 5} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x^2 + 2x + 3}{2} + \frac{x - 4}{4x^2 - 2x + 8}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2 + x + 1 - \sqrt{3x^2 + x + 5}$

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + x + 5} - x^2 - x - 1 + \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 2} - \frac{x - 4}{4x^2 - 2x + 8} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x = 1;\ x = -1 - \sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 79 Giải phương trình**

$$\sqrt[4]{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt[4]{4x^2 - 6x + 6} = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2 - 2x + 2 - \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

**và** $x^2 - 2x + 3 - \sqrt{4x^2 - 6x + 6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 80 Giải phương trình**

$\sqrt{3x^2+x+5}+(x-1)\sqrt[3]{3x^2+9x+4}=2x^2+2x-1$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+x+5}$ **và** $x+2-\sqrt[3]{3x^2+9x+4}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 81 Giải phương trình**

$\sqrt{2x^2-2x+1}-(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^3+6}=(x-2)^2$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $2-\sqrt[3]{(x-1)^3+6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

# Chuyên đề phụ:

## Ý tưởng ghép 2 phương trình thành 1 phương trình

## Hay một cách tạo ra phương trình Tích từ các biểu thức tùy ý

## (chọn hợp lí )

*Tác giả của ý tưởng:* Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự,Hoàn Sơn,Tiên Du,Bắc Ninh

**Từ hai phương trình sau:**

**Giải phương trình:** $\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{5x^2+2x}=2x^2+2x+3$ **(1)**

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2-3}$ **và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+2x}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

**Giải phương trình:** $\sqrt{2x^2-1}+2\sqrt{x^2+x+1}=2x^2+4x+5$ **(2)**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**Hướng dẫn.**

**Từ (1) và (2) ta có thể ghép lại thành PT sau:**

**Thí dụ 82 Giải phương trình(đây là PT chỉ để minh họa ý tưởng`)**

$$\left(\frac{\sqrt{3x^2-3}\sqrt{2x^2-1}}{x^2+x+1}-(x^2+2x+2)\right)\left(\frac{(x^2+x+2)(x^2+2x+3)}{\sqrt{5x^2+2x}}-2\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{(x^2+x+2)\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{5x^2+2x}}-(x^2+2x+2)\right)\left(\frac{(x^2+2x+3)\sqrt{3x^2-3}}{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(3x^2-3)(2x^2-1)}-x^2-2x-2}{(x^2+x+2)\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{5x^2+2x}}-x^2-2x-2}=\frac{\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\sqrt{3x^2-3}-2\sqrt{x^2+x+1}}{\dfrac{(x^2+x+2)(x^2+2x+3)}{\sqrt{5x^2+2x}}-2\sqrt{x^2+x+1}}$$

**HD.**

**Với (a;b),(c;d) là bộ biểu thức liên hợp của PT thứ nhất**

**(m;n),(p;q) là bộ biểu thức liên hợp của PT thứ hai**

**Ta có PT:**

$$\left(\frac{a}{b}m-n\right)\left(\frac{c}{d}p-q\right)=\left(\frac{c}{d}m-n\right)\left(\frac{a}{b}p-q\right)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)(mq-np)=0$$

**Suy ra PT ở thí dụ 82 đã cho tương đương với PT**

$$\left(\frac{\sqrt{3x^2-3}}{x^2+x+1}-\frac{x^2+x+2}{\sqrt{5x^2+2x}}\right)\left(2\sqrt{2x^2-1}.\sqrt{x^2+x+1}-(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)\right)=0$$

TH1: $\dfrac{\sqrt{3x^2-3}}{x^2+x+1}-\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{5x^2+2x}}=0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3x^2-3}}{x^2+x+1}-1+1-\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{5x^2+2x}}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x^2-3}-(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{5x^2+2x}-(x^2+x+2)}{\sqrt{5x^2+2x}}=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}$

TH2: làm tương tự

$$\left(2\sqrt{2x^2-1}.\sqrt{x^2+x+1}-(x^2+2x+2)(x^2+2x+3)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=-2;\ x=-\sqrt[3]{2}\ ;x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4}$

**Các PT trên chỉ là minh họa cho ý tưởng ghép 2 phương trình thành một phương trình.**

**Mở rộng:*Dùng kĩ thuật ghép này cho 2 phương trình liên hợp dạng bậc nhất hoặc hằng số có khả năng sẽ tạo ra được Pt đỡ phức tạp***

***Dạng PT này*** $(\frac{a}{b}m-n)(\frac{c}{d}p-q)=(\frac{c}{d}m-n)(\frac{a}{b}p-q)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)(mq-np)$ ***có thể mở rộng về dấu cộng hay trừ và thêm các hằng số trong dấu ngoặc.***

$$(\frac{a}{b}m+n)(\frac{c}{d}p+q)=(\frac{c}{d}m+n)(\frac{a}{b}p+q)\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)(mq-np)$$

***Hoặc*** $(am+bn)(cp+dq)=(cm+dn)(ap+bq)\Leftrightarrow(ad-bc)(mq-np)$

***Hoặc*** $(am-bn)(cp-dq)=(cm-dn)(ap-bq)\Leftrightarrow(ad-bc)(mq-np)$

***Nếu ai không thích ghép 2 phương trình thì chỉ cần lấy 1 phương trình tương ứng gồm 2 cặp biểu thức liên hợp,các biểu thức còn lại chọn tùy ý chứa ẩn hoặc hằng số hay mở rộng ta chọn a,b,c,d,m,n,p,q bất kì!!!***

# A.Các cách tạo ra phương trình dạng này

**Giải phương trình**

$x-\sqrt{4x-2};x+1-\sqrt{6x-1}$ **cùng 1 phương trình nhân liên hợp**

$x+2-\sqrt{9x+1};x+3-\sqrt{11x+6}$ **cùng 1 phương trình nhân liên hợp**

**Sau đây là hướng tạo ra một PT dạng này từ các biểu thức trên:**

**Giải phương trình**

$$\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{4x-2}-\sqrt{9x+1}\right)\left((x+1)\sqrt{\frac{11x+6}{6x-1}}-x-3\right)$$

$$=\left(\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{6x-1}}-\sqrt{9x+1}\right)\left(\frac{\sqrt{44x^2+2x-12}}{x}-x-3\right)$$

**Hay** $\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{4x-2}-\sqrt{9x+1}}{\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{6x-1}}-\sqrt{9x+1}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{44x^2+2x-12}}{x}-x-3}{(x+1)\sqrt{\dfrac{11x+6}{6x-1}}-x-3}$

**Hay** $\dfrac{(x+2)\sqrt{4x-2}-x\sqrt{9x+1}}{\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{6x-1}}-\sqrt{9x+1}}=\dfrac{\sqrt{44x^2+2x-12}-x^2-3x}{(x+1)\sqrt{\dfrac{11x+6}{6x-1}}-x-3}$

**Hay** $\dfrac{(x+2)\sqrt{4x-2}-x\sqrt{9x+1}}{x^2+3x+2-\sqrt{54x^2-3x-1}}=\dfrac{\sqrt{44x^2+2x-12}-x^2-3x}{(x+1)\sqrt{11x+6}-(x+3)\sqrt{6x-1}}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=2\pm\sqrt{2}\ ;x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

## B. Vận Dụng

**Ta có thể tạo ra các PT đơn giản hơn dưới đây**

**(nhìn chỉ hơi khó nhưng biến đổi nhẹ nhàng gồm kĩ năng đưa về phương trình Tích và nhân Liên hợp nếu cần +Casio bậc nhất)**

**Thí dụ 1,Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{4x-2}}-3}{\dfrac{2\sqrt{6x-1}}{x+1}-3}=\frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{4x-2}}-4}{\dfrac{x\sqrt{6x-1}}{x+1}-4}$$

hay $\dfrac{2x-3\sqrt{4x-2}}{2\sqrt{6x-1}-3x-3}=\dfrac{x^2-4\sqrt{4x-2}}{x\sqrt{6x-1}-4x-4}$ (nhìn tạm ổn)

**PT đã cho có 3 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=2\pm\sqrt{2}\ ;x=\dfrac{8}{3}$

**Thí dụ 2,Giải phương trình**

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{4x-2}}+2}{\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1}+2}=\frac{\frac{3x}{\sqrt{4x-2}}+x^2}{\frac{3\sqrt{6x-1}}{x+1}+x^2}$$

hay $\frac{x+2\sqrt{4x-2}}{\sqrt{6x-1}+2x+2}=\frac{3x+x^2\sqrt{4x-2}}{3\sqrt{6x-1}+x^3+x^2}$ (nhìn tạm ổn)

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=2\pm\sqrt{2}\ ;x=\sqrt{6}$

**Thí dụ 3,Giải phương trình**

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{4x-2}}+2}{\frac{\sqrt{6x-1}}{x+1}+2}=\frac{\frac{3x}{\sqrt{4x-2}}+x^2}{\frac{3\sqrt{6x-1}}{x+1}+x^2}$$

hay $\frac{x+2\sqrt{4x-2}}{\sqrt{6x-1}+2x+2}=\frac{3x+x^2\sqrt{4x-2}}{3\sqrt{6x-1}+x^3+x^2}$ (nhìn tạm ổn)

**PT đã cho có 3 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=2\pm\sqrt{2}\ ;x=\sqrt{6}$

**Thí dụ 4,Giải phương trình**

$$\frac{\frac{\sqrt{9x+1}}{x+2}-3}{\frac{x+3}{\sqrt{11x+6}}-3}=\frac{\frac{2\sqrt{9x+1}}{x+2}-x^3}{\frac{2x+6}{\sqrt{11x+6}}-x^3}$$

hay $\frac{\sqrt{9x+1}-3x-6}{x+3-3\sqrt{11x+6}}=\frac{2\sqrt{9x+1}-x^4-2x^3}{2x+6-x^3\sqrt{11x+6}}$ (nhìn tạm ổn)

**PT đã cho có 3 nghiệm(đã kiểm tra)** $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\ ;x=\sqrt[3]{6}$

**Thí dụ 5,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{4x+2}+3x+3}{1+3\sqrt[3]{x^2-2x}}=\frac{x^2\sqrt{4x+2}+(x+1)^2}{x^2+(x+1)\sqrt[3]{x^2-2x}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{4x+2};b=x+1;c=1;d=\sqrt[3]{x^2-2x}$

**Chọn** $m=1;n=3;p=x^2;q=x+1$

**PT đã cho có 4 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ ; $x=1\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 6,Giải phương trình**

$$\frac{2\sqrt{8x+3}+x+2}{-2+\sqrt[3]{x^2-4x}}=\frac{x^2\sqrt{8x+3}+4x+8}{-x^2+4\sqrt[3]{x^2-4x}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{8x+3};b=x+2;c=-1;d=\sqrt[3]{x^2-4x}$

**Chọn** $m=2;n=1;p=x^2;q=4$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=2\sqrt{2}$ ; $x=2\pm\sqrt{3}$

**Chú ý tìm được 4 nghiệm thì** $x=-2\sqrt{2}$ **loại do đkxđ**

**Thí dụ 7,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{20x+13}+2x^2+3x}{2+x\sqrt[3]{x^2-2x+7}}=\frac{3\sqrt{20x+13}+10x+15}{6+5\sqrt[3]{x^2-2x+7}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{20x+13};b=2x+3;c=2;d=\sqrt[3]{x^2-2x+7}$

**Chọn** $m=1;n=x;p=3;q=5$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{5}{3}$ ; $x=1\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 8,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{8x+2}+x^4+2x^3}{2x+4+3\sqrt{8x+2}}=\frac{x^3.\sqrt{28x+1}+2x+3}{6x+9+2\sqrt{28x+1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{8x+2};b=x+2;c=2x+2;d=\sqrt{28x+1}$

**Chọn** $m=1;n=x^3;p=3;q=2$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\ ;x=2\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 9,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{4x-2}+x^2}{2\sqrt{4x-2}+3x}=\frac{2x+1+x\sqrt{3x^2+8x-1}}{4x+2+3\sqrt{3x^2+8x-1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{4x-2};b=x;c=2x+1;d=\sqrt{3x^2+8x-1}$

**Chọn** $m=1;n=x;\ p=2;q=3$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{3}{2}\ ;x=2\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 10,Giải phương trình**

$$\frac{(x+1)\sqrt{x+1}+x^2}{3+\sqrt{x+1}}=\frac{x^2+2x+2-(x+1)\sqrt{5-2x}}{5-\sqrt{5-2x}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{x+1};b=1;c=2-\sqrt{5-2x};d=1$

**Chọn** $m=x+1;n=x^2;\ p=1;q=3$

**PT đã cho có 2 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{8+4\sqrt{13}}{9}\ ;x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$

**Thí dụ 11,Giải phương trình**

$$\frac{x^4.\sqrt{x^2+3}+x^2+x+2}{x.\sqrt{x^2+3}+2x^2+2x+4}=\frac{x^5-x^4+2x^3+5}{x^2-x+12}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=x^2-x+2;b=5;c=x\sqrt{x^2+3};d=x^2+x+2$

**Chọn** $m=1;n=2;\ p=x^3;q=1$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\ ;x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}}\ ;x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{73}-3}{2}}$

**Thí dụ 12,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{2x+1}+x}{2\sqrt{2x+1}+3}=\frac{7-2\sqrt[3]{1-x}}{x+2-\sqrt[3]{1-x}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{2x+1};b=1;c=2-\sqrt[3]{1-x};d=1$

**Chọn** $m=1;n=x;\ p=2;q=3$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{3}{2};x=\dfrac{61\pm11\sqrt{17}}{16}$

**Thí dụ 13. Cách tạo ra như sau:**

**Từ phương trình dùng Casio bậc nhất:** $(x+1)\sqrt{6x-1}+x\sqrt{20x-7}=3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow x\sqrt{20x-7}-1=(x+1)(3x-\sqrt{6x-1})$

*Chọn* $a=3x-\sqrt{6x-1};b=1;c=x\sqrt{20x-7}-1;d=x+1$

$m=x^3;n=1;\ p=1;q=2$ *ta có thể ngụy trang thành phương trình sau*

**Thí dụ 13,Giải phương trình**

$$\frac{3x^4-x^3\sqrt{6x-1}+1}{3x-\sqrt{6x-1}+2}=\frac{x^4\sqrt{20x-7}-x^3+x+1}{x\sqrt{20x-7}+2x+1}$$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}};x=2\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 14,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt[3]{x^5+3x^3+4x}+x+1}{x^2+3}=\frac{\sqrt[3]{x^5+3x^3+4x}+\sqrt[3]{7x+1}}{x^2-x+2+\sqrt[3]{7x+1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt[3]{x^5+3x^3+4x};b=1;c=x^2-x+2;d=1$

**Chọn** $m=1;n=x+1;\ p=1;q=\sqrt[3]{7x+1}$

*Sau đó ta phải các giải pt sau:*

$$\sqrt[3]{x^5+3x^3+4x}=x^2-x+2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+\frac{4}{x^2}+3}=x+\frac{2}{x}-1(khi x\neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{7x+1}=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

**PT đã cho có 4 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=0; x=1; x=2; x=-4$

**Thí dụ 15. Cách tạo ra như sau:**

**Từ phương trình dùng Casio :** $(x+1)\sqrt{7x+3}-(x+2)\sqrt[3]{x^2-3x}=(x+2)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{7x+3}=(x+2)(x+2+\sqrt[3]{x^2-3x})$

*Chọn* $a=\sqrt{7x+3}; b=x+2; c=x+2+\sqrt[3]{x^2-3x}; d=x+1$

$m=x^2; n=1; p=2; q=1$ *ta có thể nguỵ trang thành phương trình sau*

**Thí dụ 15,Giải phương trình**

$$\frac{x+2+x^2.\sqrt{7x+3}}{x+2+2\sqrt{7x+3}}=\frac{x^3+2x^2+x+1+x^2.\sqrt[3]{x^2-3x}}{3x+5+2\sqrt[3]{x^2-3x}}$$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\sqrt{2}\ ; x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

**Thí dụ 16,Giải phương trình**

$$\frac{x^2+x+1+x^2.\sqrt{6x^2+2x+1}}{x^2+x+1+2\sqrt{6x^2+2x+1}}=\frac{x^4+x^3+2x^2+1+2\sqrt{2x^2+x+1}}{2x^2+2x+4+2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

**PT đã cho có 5 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\pm\sqrt{2}\ ; x=0; x=1; x=-3$

**Thí dụ 17,Giải phương trình**

$$\frac{x\sqrt{8x+5}-4x^2-2x+1}{1+\sqrt{8x+5}}=\frac{x^2-x+1-x\sqrt{3x+2}}{x+3-\sqrt{3x+2}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{8x+5}-4x-3; b=x+1; c=x-1-\sqrt{3x+2}; d=1$

**Chọn** $m=1; n=4; p=x; q=1$

**Giải PT bằng liên hợp bậc nhất:** $(x+1)\sqrt{3x+2}+\sqrt{8x+5}=x^2+4x+2$

**PT đã cho có 2 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\frac{1}{4}$ ; $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**Thí dụ 18,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+x^2}{2\sqrt{1-x^2}+x^2}=\frac{2\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}+1}{1+4\sqrt{x^2-1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}; b=1; c=2\sqrt{1-x^2}; d=1$

**Chọn** $m=1; n=x^2; p=2; q=1$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=0$ ; $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

**Thí dụ 19,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt[3]{x^6-x^3+1}+x}{2x^2-2x+2}=\frac{\sqrt[3]{x^6-x^3+1}+2}{2x^2-3x+4}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt[3]{x^6-x^3+1}; b=1; c=2x^2-3x+2; d=1$

**Chọn** $m=1; n=x; p=1; q=2$

**Giải PT** $\sqrt[3]{x^6-x^3+1}=2x^2-3x+2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3+\frac{1}{x^3}-1}=2(x+\frac{1}{x})-3$

$$\Leftrightarrow x=1; x=\frac{11}{14}+\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{7}\pm\frac{\sqrt{22\sqrt{30}-45}}{14}$$

**PT đã cho có 4 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=1; x=2$ ; $x=\frac{11}{14}+\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{7}\pm\frac{\sqrt{22\sqrt{30}-45}}{14}$

**Thí dụ 20,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{5x^2-2x-4}+x^2-1}{2+\sqrt{5x^2-2x-4}}=\frac{x^2+3x-\sqrt{2x^2-3}}{3x+3-\sqrt{2x^2-3}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{5x^2-2x-4}+x^2-1; b=1; c=3x-\sqrt{2x^2-3}; d=1$

**Chọn** $m=1; n=x^2; p=1; q=3$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=1+\sqrt{5}\ ; x=\pm\sqrt{3}$

**Thí dụ 21,Giải phương trình**

$$\frac{x\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{x(2+\sqrt{x^2+1})}=\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^4-2x^2+2}}{2x^2-2+x\sqrt{x^4-2x^2+2}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=x; b=\sqrt{x^2+1}; c=x^2-1; d=\sqrt{x^4-2x^2+2}$

**Chọn** $m=\sqrt{x^2+2}; n=1; p=2; q=x$

**Đưa về PT tích ta phải giải các PT:**

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4-2x^2+2}}\Leftrightarrow x=x^2-1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$ **(dùng hàm đặc trưng)**

$$x\sqrt{x^2+2}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2(x^2+2)=4\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{5}-1}$$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ ; x=\sqrt{\sqrt{5}-1}$

**Thí dụ 22,Giải phương trình**

$$\frac{x^3+\sqrt{x^2+1}}{x+2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^4-x^2+\sqrt{x^4-2x^2+2}}{x^2-1+2\sqrt{x^4-2x^2+2}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=x; b=\sqrt{x^2+1}; c=x^2-1; d=\sqrt{x^4-2x^2+2}$

**Chọn** $m=x^2; n=1; p=1; q=2$

**Đưa về PT tích ta phải giải các PT:**

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4-2x^2+2}}\Leftrightarrow x=x^2-1\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$ **(dùng hàm đặc trưng)**

$$2x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

**PT đã cho có 3 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,;x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Thí dụ 23,Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}.x}{3\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{2}}=\frac{x-\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}.x^2}}{2-3\sqrt{x}+3\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}.x^2}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{1-x^2}\,;b=\sqrt{2};c=\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}x^2}-\sqrt{2};d=1$

**Chọn** $m=1;n=x;p=3;q=2$

**Đưa về PT tích ta phải giải các PT:**

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}x^2}-\sqrt{x})\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}\,(*)$$

**Sử dụng a,b không âm có Bất đẳng thức:** $\sqrt{a+b}\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$ **đẳng thức xảy ra** $a=b$

**Áp dụng :** $VT(*)\le\sqrt{2(\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2})}\le\sqrt{2\sqrt{2\left[\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right]}}=\sqrt{2\sqrt{2}}=VP(*)$

**đẳng thức xảy ra** $x=\sqrt{2}-1$

$$3x=2.1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

**PT đã cho có 2 nghiệm (đã kiểm tra)** $x=\frac{2}{3}\,;x=\sqrt{2}-1$

**Thí dụ 24,Giải phương trình**(**Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du 1**)

$$\frac{\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}x^2+8x^3}{1+x^4}=\frac{\sqrt{3}+18x-\sqrt{3}x^2}{3+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}x^2; b=8x; c=1-x^2; d=1+x^2$

**Chọn** $m=1; n=x^2; p=1; q=2$

**Đưa về PT tích:** $\dfrac{\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}x^2+8x^3}{1+x^4}=\dfrac{\sqrt{3}+18x-\sqrt{3}x^2}{3+x^2}$

$$\Leftrightarrow [\left(\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}x^2\right)(1+x^2)-8x(1-x^2)](x^2-2)=0$$

**ta phải giải PT:**

$$\left(\sqrt{3}+2x-\sqrt{3}x^2\right)(1+x^2)=8x(1-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}+\sqrt{3}.\frac{1-x^2}{1+x^2}=4\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1-x^2}{1+x^2} (*)$$

**Đặt** $x=\tan t$ **với** $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

**Pt(*) trở thành** $\sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t=4\sin 2t\cos 2t \Leftrightarrow \sin 2t+\sqrt{3}\cos 2t=2\sin 4t$

$$\Leftrightarrow \sin 4t=\sin(2t+\frac{\pi}{3})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ t=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$$

**Suy ra** $t=\frac{\pi}{6}\ ;t=\frac{\pi}{9}\ ;t=\frac{4\pi}{9}\ ;t=\frac{-2\pi}{9}$

**Pt(*) có 4 nghiệm** $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;x=\tan\frac{\pi}{9}\ ;x=\tan\frac{4\pi}{9}\ ;x=\tan\frac{-2\pi}{9}$

**Pt(*) có 6 nghiệm** $x=\pm\sqrt{2}; x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ;x=\tan\frac{\pi}{9}\ ;x=\tan\frac{4\pi}{9}\ ;x=\tan\frac{-2\pi}{9}$

**Thí dụ 25,Giải phương trình**(Vũ Hồng Phong Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du )

$$\frac{-\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x^2+8x^4}{1-x^2+x^3+x^4}=\frac{-\sqrt{3}+18x+\sqrt{3}x^2}{3+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=-\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x^2; b=8x; c=1-x^2; d=1+x^2$

**Chọn** $m=1; n=x^3; p=1; q=2$

**Đưa về PT tích:** $\dfrac{-\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x^2+8x^4}{1-x^2+x^3+x^4}=\dfrac{-\sqrt{3}+18x+\sqrt{3}x^2}{3+x^2}$

$\Leftrightarrow [(-\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x^2)(1+x^2)-8x(1-x^2)](x^3-2)=0$

**ta phải giải PT:**

$(-\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x^2)(1+x^2)=8x(1-x^2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}-\sqrt{3}.\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=4\dfrac{2x}{1+x^2}.\dfrac{1-x^2}{1+x^2}(*)$

**Đặt** $x=\tan t$ **với** $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

**Pt(*) trở thành** $\sin 2t-\sqrt{3}\cos 2t=4\sin 2t\cos 2t \Leftrightarrow \sin 2t-\sqrt{3}\cos 2t=2\sin 4t$

$\Leftrightarrow \sin 4t=\sin(2t-\dfrac{\pi}{3})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ t=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$

**Suy ra** $t=-\dfrac{\pi}{6}; t=\dfrac{2\pi}{9}; t=\dfrac{-\pi}{9}; t=\dfrac{-4\pi}{9}$

**Pt(*) có 4 nghiệm** $x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}; x=\tan\dfrac{2\pi}{9}; x=\tan\dfrac{-\pi}{9}; x=\tan\dfrac{-4\pi}{9}$

**Pt(*) có 5 nghiệm** $x=\sqrt[3]{2}; x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}; x=\tan\dfrac{2\pi}{9}; x=\tan\dfrac{-\pi}{9}; x=\tan\dfrac{-4\pi}{9}$

**Thí dụ 26,Giải phương trình**(Vũ Hồng PhongToán K35B ĐHSP TN)

$$\frac{1+2\sqrt{3}x-x^2+8x\sqrt{1+x^2}}{1+(16+2\sqrt{3})x-x^2}=\frac{1-x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}{3+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=1+2\sqrt{3}x-x^2;b=8x;c=1-x^2;d=1+x^2$

**Chọn** $m=1;n=\sqrt{1+x^2};p=1;q=2$

**Đưa về PT tích** $\dfrac{1+2\sqrt{3}x-x^2+8x\sqrt{1+x^2}}{1+(16+2\sqrt{3})x-x^2}=\dfrac{1-x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}{3+x^2}$

$\Leftrightarrow [\left(1+2\sqrt{3}x-x^2\right)(1+x^2)-8x(1-x^2)](\sqrt{1+x^2}-2)=0$

**ta phải giải các PT:**

$\Leftrightarrow \left(1+2\sqrt{3}x-x^2\right)(1+x^2)-8x(1-x^2)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=4\dfrac{2x}{1+x^2}.\dfrac{1-x^2}{1+x^2}(*)$

**Đặt** $x=\tan t$ **với** $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

**Pt(*) trở thành** $\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t=4\sin 2t\cos 2t \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t=2\sin 4t$

$\Leftrightarrow \sin 4t=\sin(2t+\dfrac{\pi}{6})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ t=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$

**Suy ra** $t=\dfrac{\pi}{12};t=\dfrac{5\pi}{36};t=\dfrac{17\pi}{36};t=\dfrac{-7\pi}{36}$

**Pt(*) có 4 nghiệm** $x=\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3};x=\tan\dfrac{5\pi}{36};x=\tan\dfrac{17\pi}{36};x=\tan\dfrac{-7\pi}{36}$

**Pt(*) có 6 nghiệm** $x=\pm\sqrt{3};\ x=\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3};x=\tan\dfrac{5\pi}{36};x=\tan\dfrac{17\pi}{36};x=\tan\dfrac{-7\pi}{36}$

**Thí dụ 27,Giải phương trình**

$$\frac{1-2\sqrt{3}x-x^2+8x\sqrt{1+x^2}}{1+(16-2\sqrt{3})x-x^2}=\frac{1-x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}{3+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=1-2\sqrt{3}x-x^2;b=8x;c=1-x^2;d=1+x^2$

**Chọn** $m=1;n=\sqrt{1+x^2}\,;\,p=1;q=2$

**Đưa về PT tích** $\dfrac{1-2\sqrt{3}x-x^2+8x\sqrt{1+x^2}}{1+(16-2\sqrt{3})x-x^2}=\dfrac{1-x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}{3+x^2}$

$\Leftrightarrow[\left(1-2\sqrt{3}x-x^2\right)(1+x^2)-8x(1-x^2)](\sqrt{1+x^2}-2)=0$

**ta phải giải các PT:**

$\Leftrightarrow\left(1-2\sqrt{3}x-x^2\right)(1+x^2)-8x(1-x^2)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=4\dfrac{2x}{1+x^2}.\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\,(*)$

**Đặt** $x=\tan t$ **với** $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

**Pt(*) trở thành** $-\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t=4\sin 2t\cos 2t\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t=-2\sin 4t$

$\Leftrightarrow\sin(2t-\dfrac{\pi}{6})=\sin(-4t)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}\\ t=\dfrac{-7\pi}{12}-k\pi\end{array}\right.\quad(k\in Z)$

**Suy ra** $t=\dfrac{\pi}{36}\,;t=\dfrac{13\pi}{36};t=\dfrac{-11\pi}{36}\,;t=\dfrac{5\pi}{12}$

**Pt(*) có 4 nghiệm** $x=\tan\dfrac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}\,;x=\tan\dfrac{\pi}{36}\,;x=\tan\dfrac{13\pi}{36}\,;x=\tan\dfrac{-11\pi}{36}$

**Pt(*) có 6 nghiệm** $x=\pm\sqrt{3};\;x=\tan\dfrac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}\,;x=\tan\dfrac{\pi}{36}\,;x=\tan\dfrac{13\pi}{36}\,;x=\tan\dfrac{-11\pi}{36}$

**Thí dụ 28,Giải phương trình**

$\dfrac{1+2x-x^2+4\sqrt{2}x^3}{1+x^4}=\dfrac{1+(2+8\sqrt{2})x-x^2}{3+x^2}$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=1+2x-x^2;b=4\sqrt{2}x;c=1-x^2;d=1+x^2$

**Chọn** $m=1;n=x^2;\,p=1;q=2$

**Đưa về PT tích:** $\frac{1+2x-x^2+4\sqrt{2}x^3}{1+x^4}=\frac{1+(2+8\sqrt{2})x-x^2}{3+x^2}$

$\Leftrightarrow [(1+2x-x^2)(1+x^2)-4\sqrt{2}x(1-x^2)](x^2-2)=0$

**ta phải giải PT:**

$(1+2x-x^2)(1+x^2)=4\sqrt{2}x(1-x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\sqrt{2}\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (*)

**Đặt** $x=\tan t$ **với** $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

**Pt(*) trở thành** $\sin 2t+\cos 2t=2\sqrt{2}\sin 2t\cos 2t \Leftrightarrow \sin 2t+\cos 2t=\sqrt{2}\sin 4t$

$\Leftrightarrow \sin 4t=\sin(2t+\frac{\pi}{4})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8}+k\pi \\ t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$

**Suy ra** $t=\frac{\pi}{8}$ ; $t=\frac{11\pi}{24}$ ; $t=\frac{-5\pi}{24}$

**Pt(*) có 3 nghiệm** $x=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ ; $x=\tan\frac{11\pi}{24}=2+\sqrt{2}+\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

; $x=\tan\frac{-5\pi}{24}=2+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

**Pt có 5 nghiệm** $x=\pm\sqrt{2}$; $x=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ ; $x=\tan\frac{11\pi}{24}=2+\sqrt{2}+\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

; $x=\tan\frac{-5\pi}{24}=2+\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

## Thí dụ 29 Giải phương trình

$$\frac{1+2\sqrt{3}x-x^2+2\sin x}{4+4\sqrt{3}x-2x^2}=\frac{x^4-(6-\sin x)x^2+1+\sin x}{2x^4-11x+3}$$

## Hướng dẫn.

*Chọn* $a=1+2\sqrt{3}x-x^2; b=2, c=x^4-6x^2+1; d=1+x^2$

$m=1; n=\sin x; p=2; q=1$

*Ta giải các PT* $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)(*)$$

*Đặt* $x=\tan t$ *với* $t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

*PT(*) trở thành* $\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t=2(2\cos^2 2t-1)\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t=2\cos 4t$

$$\Leftrightarrow\cos(2t-\frac{\pi}{3})=\cos 4t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\\ t=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.$$

*Suy ra* $t=\dfrac{-\pi}{6};t=\dfrac{\pi}{18};t=\dfrac{7\pi}{18};t=\dfrac{-5\pi}{18}$

*PT(*) có 4 nghiệm* $x=\dfrac{-1}{\sqrt{3}};x=\tan\dfrac{\pi}{18};t=\tan\dfrac{7\pi}{18};t=\tan(\dfrac{-5\pi}{18})$

*Pt đã cho có nghiệm*

$$x=\frac{-1}{\sqrt{3}};x=\tan\frac{\pi}{18};x=\tan\frac{7\pi}{18};x=\tan(\frac{-5\pi}{18});x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi(k\in Z)$$

*Chú ý: Có thể tạo ra nhiều PT giải bằng phương pháp lượng giác hóa như sau*

$$\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)(*)$$

*Từ PT(*) ta có thể tạo ra các PT tương tự:*

$$\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

$$-\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

$$\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(1-2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)$$

$$\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\left(1-2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right)$$

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

$$\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

$$\frac{2x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{1+x^2}=-2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

$$\frac{-2x}{1+x^2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x^2}{1+x^2}=2\left(2\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1\right)$$

*Các thí dụ trước đều có thể tạo ra các PT (giải bằng lượng giác hóa )theo hướng này*

**Thêm một số dạng PT lượng giác hóa:**

$$\sin 4t=\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2};\cos 4t=\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2};\sin 2t=\frac{2x}{1+x^2};\cos 2x=\frac{1-x^2}{1+x^2};x=\tan t$$

$$|\sin t|=\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}=\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\cos t=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}};t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

**Chú ý: Do** $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ **nên** $\sin t;\sin\frac{t}{2}$ **và x cùng dấu với nhau**

$$\cos\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}};\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}=\frac{|x|}{\sqrt{2+2x^2+2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{t}{2}=\frac{x}{\sqrt{2+2x^2+2\sqrt{1+x^2}}}$$

$$a)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{4x}{1+x^2}\Leftrightarrow\pm\frac{4x(1-x^2)}{1+x^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{x^4-6x^2+1}{1+x^2}=\pm4x$$

$$\Leftrightarrow\pm4x(1-x^2)\pm\sqrt{3}(x^4-6x^2+1)=\pm4x(1+x^2)$$

$$b)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2-2x^2}{1+x^2}$$

$$c)\pm\frac{4\sqrt{3}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{4x}{1+x^2}$$

$$d)\pm\frac{4\sqrt{3}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2-2x^2}{1+x^2}$$

$$e)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{4\sqrt{2}x}{1+x^2}$$

$$f)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x^2}{1+x^2}$$

$$m)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm1;\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3};\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8};\pm\sqrt{2+\sqrt{2}};....$$

$$n)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}}\qquad n_1)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$p)\pm\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}}\qquad p_1)\pm\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$q)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\sqrt{3}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$k)\pm\frac{2\sqrt{3}x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$l)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$h)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{1+x^2}}\qquad h_1)\pm\frac{2x}{1+x^2}\pm\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pm\frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$i)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{\sqrt{3}(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}}\quad i_1)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{\sqrt{3}(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$j)\pm\frac{4\sqrt{3}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2|x|}{\sqrt{1+x^2}}\quad j_1)\pm\frac{4\sqrt{3}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{\sqrt{3}(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$v)\pm\frac{4\sqrt{3}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$r)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$t)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{1+x^2}}\quad t_1)\pm\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\pm\frac{x^4-6x^2+1}{(1+x^2)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$w1)\pm\frac{x}{1+x^2}\pm\frac{\sqrt{3}}{1+x^2}=\pm\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$w2)\pm\frac{\sqrt{3}x}{1+x^2}\pm\frac{1}{1+x^2}=\pm\frac{2(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$w3)\pm\frac{x}{1+x^2}\pm\frac{1}{1+x^2}=\pm\frac{4\sqrt{2}x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$w4)\pm\frac{x}{1+x^2}\pm\frac{1}{1+x^2}=\pm\frac{\sqrt{2}(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^2}$$

$$\cos\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}};\sin\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-|x|}{2\sqrt{1+x^2}}}$$

Với $\cos\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}};\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}=\frac{|x|}{\sqrt{2+2x^2+2\sqrt{1+x^2}}}$

$$\Rightarrow\sin\frac{t}{2}=\frac{x}{\sqrt{2+2x^2+2\sqrt{1+x^2}}}$$

*Xin dành để các bạn có thể tự tạo ra các PT khác(giải bằng lượng giác hóa )theo hướng trên. Như vậy ta có khá nhiều PT giải bằng lượng giác hóa (Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du 1)*

**Nguồn gốc từ các PT lượng giác kiểu như sau:**

$\pm\sqrt{3}\sin 2t \pm \cos 2t = \pm 2\sin 4t$

$\pm\sqrt{3}\sin 2t \pm \cos 2t = \pm 2\cos 4t$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\sin 4t$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\cos 4t$

$\pm\sqrt{3}\sin 4t \pm \cos 4t = \pm 2\sin 2t$

$\pm\sqrt{3}\sin 4t \pm \cos 4t = \pm 2\cos 2t$

$\pm\sin 4t \pm \sqrt{3}\cos 4t = \pm 2\sin 2t$

$\pm\sin 4t \pm \sqrt{3}\cos 4t = \pm 2\cos 2t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\sin 2t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\cos 2t$

$\pm\sin 2t \pm \cos 2t = \pm\sqrt{2}\sin 2t$

$\pm\sin 2t \pm \cos 2t = \pm\sqrt{2}\cos 2t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}m; m \in \{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2};....\}$

$\pm\sin 4t \pm \sqrt{3}\cos 4t = \pm 2m; m \in \{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2};....\}$

$\pm\sqrt{3}\sin 4t \pm \cos 4t = \pm 2m; m \in \{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2};....\}$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\sin t$

$\pm\sqrt{3}\sin 2t \pm \cos 2t = \pm 2\sin t$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\cos t$

$\pm\sqrt{3}\sin 2t \pm \cos 2t = \pm 2\cos t$

$\pm\sin 4t \pm \sqrt{3}\cos 4t = \pm 2\sin t$

$\pm\sqrt{3}\sin 4t \pm \cos 4t = \pm 2\sin t$

$\pm\sin 4t \pm \sqrt{3}\cos 4t = \pm 2\cos t$

$\pm\sqrt{3}\sin 4t \pm \cos 4t = \pm 2\cos t$

$\pm\sin 2t \pm \cos 2t = \pm\sqrt{2}\cos t$

$\pm\sin 2t \pm \cos 2t = \pm\sqrt{2}\sin t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\cos t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\sin t$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

$\pm\sin 4t \pm \cos 4t = \pm\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\sin\frac{t}{2}$

$\pm\sin 2t \pm \sqrt{3}\cos 2t = \pm 2\cos\frac{t}{2}$

…………………….(các bạn tự tìm các dạng khác )

**Thí dụ 30 Giải phương trình**

$$\frac{x^3+x+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+1}}{x^2+1+2\sqrt{(2\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+1}}=\frac{1+x\sqrt{2-2x}}{2+\sqrt{2-2x}}$$

**Hướng dẫn.**

**Chọn** $a=x^2+1; b=\sqrt{(2\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+1}; c=\sqrt{2-2x}; d=1$

$m=x; n=1; p=1; q=2$

*Ta phải giải PT* $\sqrt{(2\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+1}\times\sqrt{2-2x}=x^2+1$

$$\Leftrightarrow (2x+x^2-1)(1+x^2)=4\sqrt{2}x(1-x^2) \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\sqrt{2}\frac{2x}{1+x^2}\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

*Đặt* $x=\tan t$ *rồi ta giải PT* $\sin 2t-\cos 2t=\sqrt{2}\sin 4t$

*PTđã cho có 4 nghiệm:* $x=\tan(\frac{-\pi}{8})=1-\sqrt{2}$; *(nghiệm kép)*

$$x=\tan\frac{5\pi}{24}=-2-\sqrt{2}+\sqrt{9+6\sqrt{2}};\ x=\tan\frac{-11\pi}{24}=-2-\sqrt{2}-\sqrt{9+6\sqrt{2}}\ ;x=\frac{1}{2}$$

*Đến đây tác giả tin rằng mọi người sẽ dễ dàng tự tạo ra rất nhiều phương trình Tích dù là dạng đơn giản hay phức tạp tùy theo ý mình.*

*Tác giả của ý tưởng :*Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du1,Tiên Du,Bắc Ninh

**Tiếp tục Casio bậc 2**

**Thí dụ 83 Giải phương trình**

$$\frac{\frac{\sqrt{5x^2-1}}{2x^2-x+1}-2}{\frac{2x^2-x+2}{\sqrt{9x^2-2x+2}}-2}=\frac{\frac{3\sqrt{5x^2-1}}{2x^2-x+1}-x^3}{\frac{6x^2-3x+6}{\sqrt{9x^2-2x+2}}-x^3}$$

**Hướng dẫn.**

**Phương trình được tạo ra từ PT**

$$\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{9x^2-2x+2}=4x^2-2x+3$$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-1}$

**và** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-2x+2}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

**Chọn** $m=1; n=2; p=3; q=x^3$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=1;\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; x=\sqrt[3]{6}$

**Thí dụ 84 Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{5x^2+3x+8}}+3}{\dfrac{\sqrt{3x^2+x+5}}{x^2+x+1}+3}=\frac{\dfrac{2x^2+2x+4}{\sqrt{5x^2+3x+8}}+x^2}{\dfrac{2\sqrt{3x^2+x+5}}{x^2+x+1}+x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Từ PT:** $\sqrt{5x^2+3x+8}+\sqrt{3x^2+x+5}=2x^2+2x+3$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+3x+8}$ **và** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+x+5}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}$

**Chọn** $m=1; n=-3; p=2; q=-x^2$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1;\ x=-1-\sqrt[3]{3}; x=\pm\sqrt{6}$

**Thí dụ 85 Giải phương trình**

$$\frac{\dfrac{x^2-2x+2}{\sqrt{2x^2-2x+1}}-2}{\dfrac{\sqrt{4x^2-6x+6}}{x^2-2x+3}-2}=\frac{\dfrac{3x^2-6x+6}{\sqrt{2x^2-2x+1}}-x}{\dfrac{3\sqrt{4x^2-6x+6}}{x^2-2x+3}-x}$$

**Hướng dẫn.**

**Từ PT:** $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2-6x+6}=2x^2-4x+5$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{2x^2-2x+1}$ **và** $x^2-2x+3-\sqrt{4x^2-6x+6}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}; x=6$

**Chọn** $m=1; n=2; p=3; q=x$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=1;\ x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 86 Giải phương trình**

$$\frac{3}{\sqrt{10x^2+14x+7}-x-2}+\frac{4}{\sqrt{44x^2+60x+37}-2x-5}=\frac{5}{x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{10x^2+14x+7}$ **và** $2x^2+2x+5-\sqrt{44x^2+60x+37}$

$$\frac{3}{\sqrt{10x^2+14x+7}-x-2}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{\sqrt{44x^2+60x+37}-2x-5}-\frac{1}{x^2}=0$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

### Thí dụ 87 Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{48x^2-60x+25}+2x-3}+\frac{1}{\sqrt{13x^2-16x+8}+x-2}=\frac{3}{2x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+3-\sqrt{48x^2-60x+25}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{13x^2-16x+8}$

$$pt\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{48x^2-60x+25}+2x-3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{\sqrt{13x^2-16x+8}+x-2}-\frac{1}{x^2}=0$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=2\pm\sqrt{2};x=-1\pm\sqrt{3}$

### Thí dụ 88 Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{48x^2-60x+25}+2x}+\frac{1}{\sqrt{13x^2-16x+8}+x}=\frac{3x^2+5}{2x^4+7x^2+6}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+3-\sqrt{48x^2-60x+25}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{13x^2-16x+8}$

$$\frac{1}{\sqrt{48x^2-60x+25}+2x}-\frac{1}{2x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{13x^2-16x+8}+x}-\frac{1}{x^2+2}=0$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=2\pm\sqrt{2};x=-1\pm\sqrt{3}$

### Thí dụ 89 Giải phương trình

$$\sqrt{2\sqrt{48x^2-60x+25}+4x-6}+\sqrt{\sqrt{13x^2-16x+8}+x-2}=3|x|$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+3-\sqrt{48x^2-60x+25}$ **và** $x^2-x+2-\sqrt{13x^2-16x+8}$

$$\sqrt{2\sqrt{48x^2-60x+25}+4x-6}-2|x|+\sqrt{\sqrt{13x^2-16x+8}+x-2}-|x|=0$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=2\pm\sqrt{2}; x=-1\pm\sqrt{3}$

**Thí dụ 90 Giải phương trình**

$$\sqrt{2\sqrt{44x^2+60x+37}-4x-10}+\sqrt{\sqrt{10x^2+14x+7}-x-2}=3|x|$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{10x^2+14x+7}$ **và** $2x^2+2x+5-\sqrt{44x^2+60x+37}$

$$\sqrt{2\sqrt{44x^2+60x+37}-4x-10}-2|x|+\sqrt{\sqrt{10x^2+14x+7}-x-2}-|x|=0$$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

**Thí dụ 91 Giải phương trình**

$$\left(\sqrt{5x^2+x-2}-1\right)^3+\left(\sqrt{12x^2+8x-11}-1\right)^3=9(2x^2-x)^3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2+x-2}$ **và** $4x^2-2x+1-\sqrt{12x^2+8x-11}$

$$pt \Leftrightarrow \left(\sqrt{5x^2+x-2}-1\right)^3-(2x^2-x)^3+\left(\sqrt{12x^2+8x-11}-1\right)^3-8(2x^2-x)^3=0$$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$

**Thí dụ 92 Giải phương trình** **(tác giả Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du 1)**

$$\sqrt{8x^4-6x^2-4}+2\sqrt[4]{6x^4-2x^2-7}=x^4$$

**Hướng dẫn.**

**Đặt** $x^2=a\geq 0$ **PT đã cho trở thành** $\sqrt{8a^2-6a-4}+2\sqrt[4]{6a^2-2a-7}=a^2$

**Điều kiện:** $\begin{cases} 8a^2-6a-4\geq 0 \\ 6a^2-2a-7\geq 0 \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\geq \dfrac{1+\sqrt{43}}{6}>1$

**Biểu thức cần tìm là** $a^2-2a+2-\sqrt{8a^2-6a-4}$ **và** $a-1-\sqrt[4]{6a^2-2a-7}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{8a^2-6a-4}-(a^2-2a+2)+2[\sqrt[4]{6a^2-2a-7}-(a-1)]=0(*)$

**PT(*)có 2 nghiệm** $a=4; a=\sqrt[3]{2}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\pm 2; a=\pm\sqrt[6]{2}$

**Thí dụ 93** **Giải phương trình**

$\sqrt{8x^4-6x^2-4}+3\sqrt[4]{6x^4-2x^2-7}=x^4+x^2-1$

**Hướng dẫn.**

**Đặt** $x^2=a\geq 0$ **PT đã cho trở thành** $\sqrt{8a^2-6a-4}+2\sqrt[4]{6a^2-2a-7}=a^2+a-1$

**Điều kiện:** $\begin{cases} 8a^2-6a-4\geq 0 \\ 6a^2-2a-7\geq 0 \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\geq \dfrac{1+\sqrt{43}}{6}>1$

**Biểu thức cần tìm là** $a^2-2a+2-\sqrt{8a^2-6a-4}$ **và** $a-1-\sqrt[4]{6a^2-2a-7}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{8a^2-6a-4}-(a^2-2a+2)+3[\sqrt[4]{6a^2-2a-7}-(a-1)]=0(*)$

**PT(*)có 2 nghiệm** $a=4; a=\sqrt[3]{2}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\pm 2; a=\pm\sqrt[6]{2}$

**Thí dụ 94** **Giải phương trình**(tác giả Vũ Hồng Phong )

$\sqrt{10x^4-9x^2-3}+3\sqrt[4]{6x^4-x^2-11}=x^4+x^2$

**Hướng dẫn.**

**Đặt** $x^2=a\geq 0$ **PT đã cho trở thành** $\sqrt{10a^2-9a-3}+3\sqrt[4]{6a^2-a-11}=a^2+a$

**Điều kiện:** $\begin{cases} 10a^2-9a-3\geq 0 \\ 6a^2-a-11\geq 0 \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\geq \dfrac{2\sqrt{59}-1}{10}>1$

**Biểu thức cần tìm là** $a^2-2a+3-\sqrt{10a^2-9a-3}$ **và** $a-1-\sqrt[4]{6a^2-a-11}$

$pt \Leftrightarrow \sqrt{10a^2-9a-3}-(a^2-2a+3)+3[\sqrt[4]{6a^2-a-1}-(a-1)]=0(*)$

**PT(*)có 2 nghiệm** $a=4; a=\sqrt[3]{3}$

**PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\pm 2; a=\pm\sqrt[6]{3}$

**Thí dụ 95 Giải phương trình**

$2\sqrt{5x^2+12x-1}+\sqrt{7x^2+14x+4}=3x^2+3x+7$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+12x-1}$ **và** $x^2+x+3-\sqrt{7x^2+14x+4}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=1;\ x=\sqrt[3]{6}-1$

**Nâng cấp:**

**Giải phương trình**

$2\sqrt{\sqrt{5x^2+12x-1}+x-1}+3\sqrt{\sqrt{7x^2+14x+4}-x-3}=5x+2(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta dùng Casio tìm được nghiệm đẹp của PT là** $x=1; x=0,817120592$

**biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{5x^2+12x-1}+x-1}-(x+1)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{7x^2+14x+4}-x-3}-x$

**ĐKXĐ:** $\sqrt{5x^2+12x-1}+x-1\geq 0(1)$ **và** $\sqrt{7x^2+14x+4}-x-3\geq 0(2)$

**Có:** $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-7+\sqrt{57}}{4} \\ x \leq \dfrac{-7-\sqrt{57}}{4} \end{array}\right.$ $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{-4+\sqrt{46}}{6} \\ x \leq \dfrac{-4-\sqrt{46}}{6} \end{array}\right.$

**Do** $VT(*) \geq 0 \Rightarrow VP(*) = 5x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-2}{5}$ **suy ra** $x \geq \dfrac{-4+\sqrt{46}}{6}$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{5x^2+12x-1}+x-1}+(x+1)>0$

$\sqrt{\sqrt{7x^2+14x+4}-x-3}+x>0$

$$PT(*) \Leftrightarrow 2.\frac{\sqrt{5x^2+12x-1}-(x^2+x+2)}{MS1}+3.\frac{\sqrt{7x^2+14x+4}-(x^2+x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=1;\ x=\sqrt[3]{6}-1$

**Thí dụ 96** **Giải phương trình**

$\sqrt{x(5x-11)}+2\sqrt{7x^2-13x+5}=3x^2-3x+8$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+2-\sqrt{x(5x-11)}$ **và** $x^2-x+3-\sqrt{7x^2-13x+5}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=-1;\ x=1-\sqrt[3]{5}$

**Nâng cấp:**

**Giải phương trình**

$\sqrt{\sqrt{5x^2-11x}+5x+2}+\sqrt{\sqrt{7x^2-13x+5}+5x+1}=2x+4(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta dùng Casio tìm được nghiệm đẹp của PT là** $x=-1; x=0,709975946$

**biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{5x^2-11x}+5x+2}-(x+2)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{7x^2-13x+5}+5x+1}-(x+2)$

**ĐKXĐ:** $\sqrt{5x^2-11x}+5x+2\geq 0(1)$ **và** $\sqrt{7x^2-13x+5}+5x+1\geq 0(2)$

**Có:** $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\geq \dfrac{11}{5} \\ \dfrac{-31-\sqrt{641}}{40}\leq x\leq 0\end{array}\right.$ $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{-23-\sqrt{817}}{36}\leq x\leq \dfrac{13-\sqrt{29}}{14} \\ x\geq \dfrac{13+\sqrt{29}}{14}\end{array}\right.$

**Do** $VT(*)\geq 0\Rightarrow VP(*)=5x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{-2}{5}$ **suy ra** $x\geq\dfrac{-4+\sqrt{46}}{6}$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{5x^2-11x}+5x+2}+(x+2)>0$

$\sqrt{\sqrt{7x^2-13x+5}+5x+1}+(x+2)>0$

$$PT(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5x^2-11x}-(x^2-x+2)}{MS1}+\frac{\sqrt{7x^2-13x+5}-(x^2-x+3)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=-1;\ x=1-\sqrt[3]{5}$

**Thí dụ 97 Giải phương trình**

$\sqrt{(2x-7)(5x-1)}+2\sqrt{8x^2-33x+2}=3x^2-6x+7$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{(2x-7)(5x-1)}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{8x^2-33x+2}$

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=-2; x=2-\sqrt[3]{9}$

**Nâng cấp: Giải phương trình**

$\sqrt{\sqrt{(2x-7)(5x-1)}-2}+3\sqrt{\sqrt{8x^2-33x+2}-1}=4-4x(*)$

**Hướng dẫn.**

**Ta dùng casio tìm được các nghiệm đẹp của PT là** $x=-2; x=-0{,}0080083823$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{(2x-7)(5x-1)}-2}-(1-x)$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $\sqrt{\sqrt{8x^2-33x+2}-1}-(1-x)$

**Do** $VT(*)\geq 0$ **suy ra** $VP(*)=4-4x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$

**Khi đó** $\sqrt{\sqrt{(2x-7)(5x-1)}-2}+(1-x)$

$\sqrt{\sqrt{8x^2-33x+2}-1}+(1-x)$

$$PT(*)\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2x-7)(5x-1)}-(x^2-2x+3)}{MS1}+3.\frac{\sqrt{8x^2-33x+2}-(x^2-2x+2)}{MS2}=0$$

**Nhân liên hợp lần nữa kết hợp điều kiện ta suy ra**

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=-2; x=2-\sqrt[3]{9}$

**Thí dụ 98 Giải phương trình**(**Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn**)

$$\frac{\sqrt{4x^2+10x+10}}{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{2x^2+6x+5}}=1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2+6x+5}$

**và** $x^2+2x+3-\sqrt{4x^2+10x+10}$

**Ta có:**

$$\frac{\sqrt{4x^2+10x+10}}{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{2x^2+6x+5}}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x+5}\left(\sqrt{4x^2+10x+10}-x^2-2x-2\right)=x^2+2x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x+5}\left(\sqrt{4x^2+10x+10}-x^2-2x-3\right)+\sqrt{2x^2+6x+5}-(x^2+2x+2)=0$$

**Nhân liên hợp PT đã cho có 2 nghiệm** $x=-1; x=-1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 99 Giải phương trình**

$$\frac{1}{\sqrt{9x^2-3x+3}-1}+\frac{2}{\sqrt{13x^2-5x+8}-2}=\frac{3}{2x^2-x+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-3x+3}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2-x+3-2\sqrt{13x^2-5x+8}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{9x^2-3x+3}-1}-\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{13x^2-5x+8}-2}-\frac{2}{2x^2-x+1}=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở từng phân thức suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=1; x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

**Thí dụ 100** **Giải phương trình**

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2+6x+8}-1}+\frac{1}{\sqrt{24x^2+28x+41}-3}=\frac{3}{2x^2+2x+2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+6x+8}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2+2x+5-\sqrt{24x^2+28x+41}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5x^2+6x+8}-1}-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{24x^2+28x+41}-3}-\frac{1}{2x^2+2x+2}=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở từng phân thức suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=\sqrt[3]{2}$

**Chú ý:** $\sqrt{5x^2+6x+8}-1>0$ ; $\sqrt{24x^2+28x+41}-3>0$

**Thí dụ 101** **Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2-5x+7}+(x-2)\sqrt[3]{3x^2+3x-2}=2x^2-2x-1$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{3x^2-5x+7}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x+1-\sqrt[3]{3x^2+3x-2}$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+7}-(x^2-x+1)+(x-2)[\sqrt[3]{3x^2+3x-2}-x-1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{3}$

**Thí dụ 102** **Giải phương trình**

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}+\frac{1}{\sqrt{8x^2+24x+41}-2x-1}=\frac{3}{2x^2}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+7x+11}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2+2x+1-\sqrt{8x^2+24x+41}$

$$\frac{1}{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}+\frac{1}{\sqrt{8x^2+24x+41}-2x-1}=\frac{3}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow [\frac{1}{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}-\frac{1}{x^2}]+[\frac{1}{\sqrt{8x^2+24x+41}-2x-1}-\frac{1}{2x^2}]=0$$

**Quy đồng rồi Nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=\sqrt[3]{5}$

**Chú ý:** $\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1>0; \forall x$ ; $\sqrt{8x^2+24x+41}-2x-1>0; \forall x$

**Tương tự:** **Giải phương trình**

$$\sqrt{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}+\sqrt{2\sqrt{8x^2+24x+41}-4x-2}=3|x|$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}+\sqrt{2\sqrt{8x^2+24x+41}-4x-2}=3|x|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{3x^2+7x+11}-x-1}-|x|+\sqrt{2\sqrt{8x^2+24x+41}-4x-2}-2|x|=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=\sqrt[3]{5}$

**Thí dụ 103** **Giải phương trình**

$$\frac{1}{\sqrt{8x^2-31x+6}+2}+\frac{1}{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}=\frac{2}{x^2-2x+4}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{8x^2-31x+6}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{10x^2-35x+11}$

$$pt \Leftrightarrow [\frac{1}{\sqrt{8x^2-31x+6}+2}-\frac{1}{x^2-2x+4}]+[\frac{1}{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}-\frac{1}{x^2-2x+4}]=0$$

**Quy đồng rồi Nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=2-\sqrt[3]{7}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$\frac{x^2-2x+4}{\sqrt{8x^2-31x+6}+1}=\frac{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}{x^2-2x+3}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{8x^2-31x+6}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2-2x+3-\sqrt{10x^2-35x+11}$

$$\frac{x^2-2x+4}{\sqrt{8x^2-31x+6}+1}=\frac{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}{x^2-2x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{8x^2-31x+6}+1}=\frac{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}{x^2-2x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{8x^2-31x+6}+1}-1+1-\frac{\sqrt{10x^2-35x+11}+1}{x^2-2x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2-\sqrt{8x^2-31x+6}}{\sqrt{8x^2-31x+6}+1}+\frac{x^2-2x+3-\sqrt{10x^2-35x+11}}{x^2-2x+4}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=2-\sqrt[3]{7}$

**Thí dụ 104 Giải phương trình**

$$\frac{2x^2+2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+x}=\frac{\sqrt{9x^2-5x+5}+x}{2x^2+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-3x+2}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-5x+5}$

$$\frac{2x^2+2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+x}=\frac{\sqrt{9x^2-5x+5}+x}{2x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{\sqrt{5x^2-3x+2}+x}=\frac{\sqrt{9x^2-5x+5}+x}{2x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{\sqrt{5x^2-3x+2}+x}-1+1-\frac{\sqrt{9x^2-5x+5}+x}{2x^2+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x+1-\sqrt{5x^2-3x+2}}{\sqrt{5x^2-3x+2}+x}+\frac{2x^2-x+2-\sqrt{9x^2-5x+5}}{2x^2+2}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=1; x=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

# Chuyên đề 3 TÌM NHÂN TỬ CỦA PHƯƠNG TRÌNH DÙNG CASIO

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\sqrt{-2x^2+6x-3}=x^4-4x^3+7x^2-8x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x-\sqrt{-2x^2+6x-3}$

**Chú ý: ta có** $(x^2-2x)-(-2x^2+6x-3)=x^4-4x^3+6x^2-6x+3$

PT đã cho có 1 nghiệm: $x=1+\sqrt[3]{2}$

**Chú ý: Bấm máy tính ta tìm được 1 nghiệm.Ta tìm thêm**

$x=1$ **là nghiệm ngoại lai** nó là nghiệm PT: $-\sqrt{-2x^2+6x-3}=x^4-4x^3+7x^2-8x+3$

***Giải phương trình sau (không dùng CASIO)**

$$\sqrt{-2x^2+6x-3}+\sqrt{2x-2}=2x^2-4x+1$$

**Đặt** $\sqrt{2x-2}=a\,;\sqrt{-2x^2+6x-3}=b$ **suy ra** $\begin{cases} a+b=2x^2-4x+1 \\ a^2-b^2=2x^2-4x+1 \end{cases}$

**Tìm a,b theo x rồi suy ra** $x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$3\sqrt{-2x^2+6x-3}-\sqrt{2x-2}=2x^2-4x-1$

**Hướng dẫn. Bấm máy tính ta tìm được 1 nghiệm.**

**Tìm được nghiệm ngoại lai đẹp x=1bằng cách đổi dấu trước căn**

**Được PT sau:** $-3\sqrt{-2x^2+6x-3}-\sqrt{2x-2}=2x^2-4x-1$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x-\sqrt{-2x^2+6x-3}$ **và** $x^2-2x+1-\sqrt{2x-2}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{-2x^2+6x-3}-\sqrt{2x-2}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{-2x^2+6x-3}-\sqrt{2x-2}+1$

**Dùng casio giúp ta định hướng được PT đã cho có thể đưa về PT tích. Cụ thể như sau**

**Đặt** $\sqrt{-2x^2+6x-3}=a\,;\sqrt{2x-2}=b$ **Tacó** $a^2-b^2=-2x^2+4x-1$

**Thay vào PT được** $(a-b+1)(a+b+2)=0$

**Giải PT** $\sqrt{-2x^2+6x-3}-\sqrt{2x-2}+1=0$ **bằng cách chuyển vế,bình phương**

**Hoặc tìm a,b theo x ta Suy ra PT có 1 nghiệm** $x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$\sqrt{3x^2-6x}-2\sqrt{x^2-5}+x^2-3x+1=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-3x+2-\sqrt{3x^2-6x}$ **và** $x^2-3x+1-\sqrt{x^2-5}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{3x^2-6x}-\sqrt{x^2-5}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{3x^2-6x}-\sqrt{x^2-5}-1$

**Đặt** $\sqrt{3x^2-6x}=a\ge 0\,;\sqrt{x^2-5}=b\ge 0$ **Tacó** $a^2-b^2=2x^2-6x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+3)=0$

**Giải PT** $\sqrt{3x^2-6x}-\sqrt{x^2-5}-1=0$ **bằng cách chuyển vế,bình phương**

**Hoặc tìm a,b theo x ta Suy ra**

**PT có 2 nghiệm** $x=1+\sqrt[3]{2}\;;x=3$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$\sqrt{-12x^2+25x-4}+3\sqrt{-4x^2+9x-4}+8x^2-16x+2=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $-2x^2+4x+1-\sqrt{-12x^2+25x-4}$ **và** $-2x^2+4x-1-\sqrt{-4x^2+9x-4}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{-12x^2+25x-4}-\sqrt{-4x^2+9x-4}-2=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{-12x^2+25x-4}-\sqrt{-4x^2+9x-4}-2$

**Đặt** $\sqrt{3x^2-6x}=a\ge 0\,;\sqrt{x^2-5}=b\ge 0$ **Tacó** $a^2-b^2=-8x^2+16x$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+3)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=1+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\;;x=1$

**Thí dụ 5 Giải phương trình**

$3\sqrt{3-5x}-5\sqrt{-2x^2-9x+6}+2x^2+4x-7=0$

**Hướng dẫn. Bấm máy tính ta tìm được 1 nghiệm.**

**Tìm thêm nghiệm ngoại lai là nghiệm PT:** $3\sqrt{3-5x}+5\sqrt{-2x^2-9x+6}+2x^2+4x-7=0$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x-1-\sqrt{3-5x}$ **và** $x^2+2x-2-\sqrt{-2x^2-9x+6}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{3-5x}-\sqrt{-2x^2-9x+6}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{3-5x}-\sqrt{-2x^2-9x+6}-1$

**Đặt** $\sqrt{3-5x}=a\geq 0$ ; $\sqrt{-2x^2-9x+6}=b\geq 0$ **Tacó** $a^2-b^2=2x^2+4x-3$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+4)=0$

**PT có 1 nghiệm** $x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

**Thí dụ 6 Giải phương trình**

$4x^2+6x-1+\sqrt{3-2x^2}-3\sqrt{-6x^2-6x+2}=0$

**Hướng dẫn.**

**Tìm thêm nghiệm ngoại lai là nghiệm PT:** $4x^2+6x-1-\sqrt{3-2x^2}-3\sqrt{-6x^2-6x+2}=0$

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+1-\sqrt{3-2x^2}$ **và** $2x^2+3x-\sqrt{-6x^2-6x+2}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{3-2x^2}-\sqrt{-6x^2-6x+2}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{3-2x^2}-\sqrt{-6x^2-6x+2}-1$

**Đặt** $\sqrt{3-2x^2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{-6x^2-6x+2}=b\geq 0$ **Tacó** $a^2-b^2=4x^2+6x+1$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PT có 1 nghiệm** $x=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

**Thí dụ 7 Giải phương trình**

$4x^2-4x+3+2\sqrt{3x^2+3}-3\sqrt{8x^2+4x+7}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-2x+3-2\sqrt{3x^2+3}$ **và** $2x^2-2x+2-\sqrt{8x^2+4x+7}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{3x^2+3}-\sqrt{8x^2+4x+7}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{3x^2+3}-\sqrt{8x^2+4x+7}-1=0$

**Đặt** $2\sqrt{3x^2+3}=a\geq 0$ ; $\sqrt{8x^2+4x+7}=b\geq 0$ **Tacó** $a^2-b^2=4x^2-4x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=1\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

**Thí dụ 8 Giải phương trình**

$$2x^2+3x+1+\sqrt{25x^2+12x+12}-2\sqrt{12x^2+6x+7}=0$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+3x+3-\sqrt{25x^2+12x+12}$ **và** $2x^2+3x+2-\sqrt{12x^2+6x+7}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{25x^2+12x+12}-\sqrt{12x^2+6x+7}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{25x^2+12x+12}-\sqrt{12x^2+6x+7}-1$

**Đặt** $\sqrt{25x^2+12x+12}=a\geq 0$ ; $\sqrt{12x^2+6x+7}=b\geq 0$ **Tacó** $a^2-b^2=4x^2+6x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+3)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$

**Thí dụ 9 Giải phương trình**

$$2x^2+4x+3+2\sqrt{3x^2+4x+2}-3\sqrt{10x^2+12x+3}=0$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+3-2\sqrt{3x^2+4x+2}$ **và** $x^2+2x+2-\sqrt{10x^2+12x+3}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{10x^2+12x+3}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{10x^2+12x+3}-1$

**Đặt** $2\sqrt{3x^2+4x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{10x^2+12x+3}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2+4x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=\pm 1$ ; $x=-2\pm\sqrt{5}$

**Nâng cấp: Giải phương trình** *(tác giả Vũ Hồng Phong)*

$$2x^2+3x+7+2(x-3)\sqrt{3x^2+4x+2}=(x-1)\sqrt{10x^2+12x+3}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+3-2\sqrt{3x^2+4x+2}$ **và** $x^2+2x+2-\sqrt{10x^2+12x+3}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{10x^2+12x+3}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{10x^2+12x+3}-1$

**Đặt** $2\sqrt{3x^2+4x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{10x^2+12x+3}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2+4x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+x-2)=0$

**+PT :** $2\sqrt{3x^2+4x+2}-\sqrt{10x^2+12x+3}-1=0$

**có 4 nghiệm** $x=\pm 1$ ; $x=-2\pm\sqrt{5}$

**+PT :** $2\sqrt{3x^2+4x+2}+\sqrt{10x^2+12x+3}=2-x$

**có 2 nghiệm** $x=-1$ ; $x=\frac{-1}{3}$

**PT đã cho có 5 nghiệm** $x=\pm 1$ ; $x=-2\pm\sqrt{5}$; $x=\frac{-1}{3}$

**Thí dụ 10 Giải phương trình**

$$2x^2+6x+3+2\sqrt{10x^2+26x+7}-3\sqrt{8x^2+20x+2}=0$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+3x+2-\sqrt{10x^2+26x+7}$ **và** $x^2+3x+3-\sqrt{8x^2+20x+2}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{10x^2+26x+7}-\sqrt{8x^2+20x+2}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{10x^2+26x+7}-\sqrt{8x^2+20x+2}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{10x^2+26x+7}=a\geq 0$ ; $\sqrt{8x^2+20x+2}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2+6x+5$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=-1\pm\sqrt{2}$ ; $x=-2\pm\sqrt{6}$

**Thí dụ 11 Giải phương trình**

$4x^2+4x+1+\sqrt{16x^2+12x-3}-2\sqrt{33x^2+24x-8}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+2x+1-\sqrt{16x^2+12x-3}$ **và** $3x^2+3x+1-\sqrt{33x^2+24x-8}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $3\sqrt{16x^2+12x-3}-2\sqrt{33x^2+24x-8}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $3\sqrt{16x^2+12x-3}-2\sqrt{33x^2+24x-8}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{16x^2+12x-3}=a\geq 0$ ; $\sqrt{33x^2+24x-8}=b\geq 0$

**Ta dựa vào hệ số bất định giả sử** $4x^2+4x+m=na^2+pb^2$

**Suy ra** $n=3; p=\frac{-4}{3}; m=\frac{5}{3}$ **nên có** $4x^2+4x+\frac{5}{3}=3a^2-\frac{4}{3}b^2$

**Thay vào PT được** $(3a-2b-1)(3a+2b+2)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=\pm 1$ ; $x=-1\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 12 Giải phương trình**

$4x^2+8x+3+\sqrt{44x^2+56x-7}-6\sqrt{10x^2+12x-3}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+4x+3-\sqrt{44x^2+56x-7}$ **và** $x^2+2x+1-\sqrt{10x^2+12x-3}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{44x^2+56x-7}-2\sqrt{10x^2+12x-3}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{44x^2+56x-7}-2\sqrt{10x^2+12x-3}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{44x^2+56x-7}=a\ge 0\,;\sqrt{10x^2+12x-3}=b\ge 0$

**Ta dựa vào hệ số bất định giả sử** $4x^2+8x+m=na^2+pb^2$

**Suy ra** $n=1;\,p=-4;\,m=5$ **nên có** $4x^2+8x+5=a^2-4b^2$

**Thay vào PT được** $(a-2b-1)(a+2b+2)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=\pm\sqrt{2}\ ;x=-2\pm\sqrt{6}$

**Thí dụ 13 Giải phương trình**

$$4x^2-8x+5+2\sqrt{8x^2-33x+2}-3\sqrt{28x^2-124x+1}=0$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-2x+2-\sqrt{8x^2-33x+2}$ **và** $2x^2-4x+3-\sqrt{28x^2-124x+1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{8x^2-33x+2}-\sqrt{28x^2-124x+1}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{8x^2-33x+2}-\sqrt{28x^2-124x+1}-1$

**Đặt** $\sqrt{8x^2-33x+2}=a\ge 0\ ;\sqrt{28x^2-124x+1}=b\ge 0$

**Ta dựa vào hệ số bất định giả sử** $4x^2-8x+m=na^2+pb^2$

**Suy ra** $n=4;\,p=-1;\,m=5$ **nên có** $4x^2-8x+5=4a^2-b^2$

**Thay vào PT được** $(2a-b-1)(2a+b+2)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=-2\ ;x=2+\sqrt[3]{9}$

**Thí dụ 14 Giải phương trình**

$$6\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{12x^2+16x+13}=4x^2+8x+7$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2+2x+1}$ **và** $2x^2+4x+5-\sqrt{12x^2+16x+13}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{12x^2+16x+13}+1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{2x^2+2x+1}-\sqrt{12x^2+16x+13}+1=0$

**Đặt** $\sqrt{8x^2-33x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{28x^2-124x+1}=b\geq 0$

**Thay vào PT được** $(2a-b+1)(2a+b+2)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=-1$ ; $x=-1-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 15 Giải phương trình**

$6|x+1|\sqrt{x^2+5}+3|x|\sqrt{9x^2+18x+14}=20x^2+45x+20$

**Hướng dẫn. (dùng máy tính dùng tính chất** $|A|=\sqrt{A^2}$ **)**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+2-|x+1|\sqrt{x^2+5}$ **và** $3x^2+3x+1-|x|\sqrt{9x^2+18x+14}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $3|x+1|\sqrt{x^2+5}-|x|\sqrt{9x^2+18x+14}-5=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $3|x+1|\sqrt{x^2+5}-|x|\sqrt{9x^2+18x+14}-5$

**Đặt** $|x+1|\sqrt{x^2+5}=a\geq 0$ ; $|x|\sqrt{9x^2+18x+14}=b\geq 0$

**Chú ý:** $9a^2-b^2=4x^2+90x+45$

**Thay vào PT được** $(3a-b-5)(3a+b+1)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=-3\pm 2\sqrt{2}$

**Thí dụ 16 Giải phương trình**

$8|x+1|\sqrt{4x^2+10}+6|x|\sqrt{16x^2+32x+26}=30x^2+80x+35$

**Hướng dẫn. (dùng máy tính dùng tính chất** $|A|=\sqrt{A^2}$ **để mất dấu ||)**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2+2x+3-|x+1|\sqrt{4x^2+10}$ **và** $4x^2+4x+1-|x|\sqrt{16x^2+32x+26}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2|x+1|\sqrt{4x^2+10}-|x|\sqrt{16x^2+32x+26}-5=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2|x+1|\sqrt{4x^2+10}-|x|\sqrt{16x^2+32x+26}-5=0$

**Đặt** $|x+1|\sqrt{4x^2+10}=a\ge 0$ ; $|x|\sqrt{16x^2+32x+26}=b\ge 0$

**Chú ý:** $4a^2-b^2=30x^2+80x+40$

**Thay vào PT được** $(2a-b-5)(2a+b+1)=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=\dfrac{4\pm 3\sqrt{2}}{2}$

**Thí dụ 17 Giải phương trình**

$4x^2+4x+5+2\sqrt{10x^2+6x+3}-3\sqrt{36x^2+20x+5}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{10x^2+6x+3}$ **và** $2x^2+2x+3-\sqrt{36x^2+20x+5}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{10x^2+6x+3}-\sqrt{36x^2+20x+5}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{10x^2+6x+3}-\sqrt{36x^2+20x+5}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{10x^2+6x+3}=a\ge 0$ ; $\sqrt{36x^2+20x+5}=b\ge 0$

**Tacó** $4a^2-b^2=4x^2+4x+7$

**Thay vào PT được** $(2a-b-1)(2a+b+2)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ; $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

**Thí dụ 18 Giải phương trình**

$8x^2-4x+1+2\sqrt{5x^2+x-2}-3\sqrt{12x^2+8x-11}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $2x^2-x+1-\sqrt{5x^2+x-2}$ **và** $4x^2-2x+1-\sqrt{12x^2+8x-11}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $2\sqrt{5x^2+x-2}-\sqrt{12x^2+8x-11}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $2\sqrt{5x^2+x-2}-\sqrt{12x^2+8x-11}-1$

**Dùng casio giúp ta định hướng được PT đã cho có thể đưa về PT tích. Cụ thể như sau**

**Đặt** $\sqrt{5x^2+x-2}=a$ ; $\sqrt{12x^2+8x-11}=b$ **Tacó** $4a^2-b^2=8x^2-4x+1$

**Thay vào PT được** $(2a-b-1)(2a+b+2)=0$

**Giải PT** $2\sqrt{5x^2+x-2}-\sqrt{12x^2+8x-11}-1=0$ **bằng cách chuyển vế,bình phương**

**Hoặc tìm a,b theo x ta Suy ra PT có 2 nghiệm** $x=1;\ x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

**Thí dụ 19 Giải phương trình**

$$\sqrt{8x^2+20x-3}+\sqrt{5x^2+8x+3}=3x^2+3x+3$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+8x+3}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $2x^2+2x+1-\sqrt{8x^2+20x-3}$

**Đặt** $\sqrt{5x^2+8x+3}=a\geq 0$ ; $\sqrt{8x^2+20x-3}=b\geq 0$

**Suy ra** $4a^2-b^2=12x^2+12x+15$

**Pt đã cho có dạng** $(2a-b-3)(2a+b+1)=0$

**PT đã cho có 2 nghiệm** $x=1; x=-1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 20 Giải phương trình (bài khó chỉ để tham khảo)**

$$5x^2+2x+\frac{9x^2-5}{3\sqrt{2x^2-1}-1}=(4\sqrt{2x^2-1}+1)\sqrt{x^2+x+1}$$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

$$pt\Leftrightarrow 5x^2+2x+\frac{(3\sqrt{2x^2-1}-1)(3\sqrt{2x^2-1}+1)}{2(3\sqrt{2x^2-1}-1)}=(4\sqrt{2x^2-1}+1)\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow 10x^2+4x+1+3\sqrt{2x^2-1}=2(4\sqrt{2x^2-1}+1)\sqrt{x^2+x+1}$$

**Tìm nghiệm đẹp x=-1 và x=-2,587401052**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{2x^2-1}$ **và** $x^2+2x+3-2\sqrt{x^2+x+1}$

**Suy ra** $2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-1}-1$ **là nhân tử cần xuất hiện**

$$pt \Leftrightarrow [2\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-1}-1][2\sqrt{x^2+x+1}-3\sqrt{2x^2-1}]=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=-1;\ x=-1-\sqrt[3]{4};x=\dfrac{2\pm\sqrt{186}}{14}$

**Lưu ý: +dùng hệ số bất định có** $10x^2+4x+1=(2\sqrt{x^2+x+1})^2+3(\sqrt{2x^2-1})^2$

**+dùng Casio nếu tìm được nghiệm là nghiệm pt bậc 2 vd X=1,117012978 dùng casio ta tinh ý thì biết được điều sau** $2\sqrt{x^2+x+1}-3\sqrt{2x^2-1}=0$

**Thí dụ 21 Giải phương trình**

$$(x^2+2x-1)\sqrt{-4x^2+11x-3}=x^4-6x^2+1$$

**Hướng dẫn.**

**Dùng Casio nếu các bạn tìm được 2 nghiệm là nghiệm của PT bậc 2 có tổng,tích đẹp thì nó là pt:** $x^2+2x-1=0$

$$pt \Leftrightarrow (x^2+2x-1)\sqrt{-4x^2+11x-3}=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$$

PT đã cho có 3 nghiệm $x=-1\pm\sqrt{2};x=1+\sqrt[3]{3}$

**Chú ý:**

**Nếu tìm 1nghiệm không là nghiệm bậc 2 thì cần tìm thêm nghiệm ngoại lai là 1**

**Thí dụ 22 Giải phương trình**

$$\left(x^2-2x+2\right)\sqrt{2x^2+6x+5}=x^4+4$$

**Hướng dẫn.**

**Dùng Casio biểu thức cần tìm là** $\sqrt{2x^2+6x+5}-(x^2+2x+2)$

$$pt \Leftrightarrow (x^2-2x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$$

PT đã cho có 2 nghiệm $x=-1;x=-1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 23 Giải phương trình**

$\sqrt{8x^2+33x+2}+2\sqrt{6x^2+29x-1}=3x^2+6x+4$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{8x^2+33x+2}$

**và** $x^2+2x+1-\sqrt{6x^2+29x-1}$

**PTcó 2 nghiệm** $x=2; x=-2+\sqrt[3]{9}$

**Nâng cấp**

**1) Giải phương trình**

$2x^2+4x+2+\sqrt{8x^2+33x+2}-3\sqrt{6x^2+29x-1}=0$

**Hướng dẫn.**

**Ta dùng Casio tìm được các nghiệmcủa PT là** $x=2; x=0,0080083823$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{8x^2+33x+2}$

**và** $x^2+2x+1-\sqrt{6x^2+29x-1}$

**Cho 2 biểu thức bằng 0 suy ra** $\sqrt{8x^2+33x+2}-\sqrt{6x^2+29x-1}-1=0$

**suy ra nhân tử cần xuất hiện là:** $\sqrt{8x^2+33x+2}-\sqrt{6x^2+29x-1}-1=0$

**Đặt** $\sqrt{8x^2+33x+2}=a\geq 0$ ; $\sqrt{6x^2+29x-1}=b\geq 0$

**Tacó** $a^2-b^2=2x^2+4x+3$

**Thay vào PT được** $(a-b-1)(a+b+2)=0$

**PTcó 2 nghiệm** $x=2; x=-2+\sqrt[3]{9}$

**2) Giải phương trình**

$\left(x+\frac{2}{x}+3\right)\sqrt{6x^2+29x-1}=x^2+9x+32$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+2x+1-\sqrt{6x^2+29x-1}$

**Biểu thức nữa cần tìm là** $x+1-\sqrt{6x^2+29x-1}$

$$\left(x+\frac{2}{x}+3\right)\sqrt{6x^2+29x-1}=x^2+9x+32 \Leftrightarrow \left(x^2+3x+2\right)\sqrt{6x^2+29x-1}=x^3+9x^2+32x$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1+x+1\right)\sqrt{6x^2+29x-1}=(x+1)^3+9x^2+29x-1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^2+29x-1}-(x^2+2x+1)\right)\left(\sqrt{6x^2+29x-1}-x-1\right)=0$$

**PTcó 3 nghiệm** $x=2; x=\sqrt[3]{9}-2; x=\frac{-27+\sqrt{769}}{10}$

**Thí dụ 24 Giải phương trình**

$$2\sqrt{3x^2+6x}-\sqrt{5x^2+8x+3}=\frac{7x^2+16x-3}{3x^2+3x+4}$$

**Hướng dẫn.**

$$2\sqrt{3x^2+6x}-\sqrt{5x^2+8x+3}=\frac{7x^2+16x-3}{3x^2+3x+4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2+6x}-\sqrt{5x^2+8x+3}=\frac{\left(2\sqrt{3x^2+6x}-\sqrt{5x^2+8x+3}\right)\left(2\sqrt{3x^2+6x}+\sqrt{5x^2+8x+3}\right)}{3x^2+3x+4}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2+6x}-\sqrt{5x^2+8x+3}=0$ **hoặc**

$$2\sqrt{3x^2+6x}+\sqrt{5x^2+8x+3}=3x^2+3x+4$$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{3x^2+6x}$

**và** $x^2+x+2-\sqrt{5x^2+8x+3}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=-1+\sqrt[3]{2}; x=\frac{-8\pm\sqrt{85}}{7}$

**Nâng cấp Giải phương trình**

$$\sqrt{3x^2+6x}+x-3=\frac{8x-5}{x^2+2}$$

**Hướng dẫn. ĐKXĐ…**

$$\sqrt{3x^2+6x}+x-3=\frac{8x-5}{x^2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+6x}=\frac{-x^3+3x^2+6x+1}{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1+1-x)\sqrt{3x^2+6x}=3x^2+6x+(1-x)(x^2+x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+6x}-x^2-x-1\right)\left(\sqrt{3x^2+6x}+x-1\right)=0$$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=-1+\sqrt[3]{2}; x=\frac{-4\pm3\sqrt{2}}{2}$

**Pt trên để nhìn phức tạp hơn ta chuyển thành**

**Giải phương trình:** $\frac{2x^2+12x-9}{\sqrt{3x^2+6x}-x+3}=\frac{8x-5}{x^2+2}$

**Hay Giải phương trình:** $\frac{x^2+2}{\sqrt{3x^2+6x}-x+3}=\frac{8x-5}{2x^2+12x-9}$

**PTcó 4 nghiệm** $x=1; x=-1+\sqrt[3]{2}; x=\frac{-4\pm3\sqrt{2}}{2}$

**Thí dụ 25 Giải phương trình**

$$2\sqrt{3x^2-8x-2}-\sqrt{-16x^2-4x+13}=(2x+1)(2x-3)$$

**Hướng dẫn. ĐKXĐ……**

$$2\sqrt{3x^2-8x-2}-\sqrt{-16x^2-4x+13}=(2x+1)(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-8x-2}-\sqrt{-16x^2-4x+13}$$
$$=\frac{\left(2\sqrt{3x^2-8x-2}-\sqrt{-16x^2-4x+13}\right)\left(2\sqrt{3x^2-8x-2}+\sqrt{-16x^2-4x+13}\right)}{7}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-8x-2}-\sqrt{-16x^2-4x+13}=0$ **hoặc** $2\sqrt{3x^2-8x-2}+\sqrt{-16x^2-4x+13}=7(*)$

**Biểu thức cần tìm là** $x^2-x+1-\sqrt{3x^2-8x-2}$

**và** $-2x^2+2x+5-\sqrt{-16x^2-4x+13}$

**Có** $(2\sqrt{3x^2-8x-2})^2-(\sqrt{-16x^2-4x+13})^2=7(2x+1)(2x-3)(**)$

**Để giải (*) ta kết hợp với (**) suy ra** $x^2-x+1=\sqrt{3x^2-8x-2}$ **và**

$-2x^2+2x+5=\sqrt{-16x^2-4x+13}$

**PT đã cho có 3 nghiệm** $x=-1; x=1-\sqrt[3]{4}; x=\dfrac{-1}{2}$

**Thí dụ 26 Giải phương trình**

$2x^2+4x+3+\sqrt{10x^2+35x+11}-3\sqrt{8x^2+31x+6}=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+2x+2-\sqrt{10x^2+35x+11}$

**Tương tự,biểu thức liên hợp nữa cần tìm là** $x^2+2x+3-\sqrt{10x^2+35x+11}$

$PT \Leftrightarrow [\sqrt{10x^2+35x+11}-\sqrt{8x^2+31x+6}-1][\sqrt{10x^2+35x+11}+\sqrt{8x^2+31x+6}+2]=0$

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=\sqrt[3]{7}-2$

# Hướng dẫn một số cách hay dùng để tạo ra phương trình Tích(*Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du 1)*

**Muốn có nghiệm** $x=2; x=\sqrt[3]{3}$ **cần có pt:** $(x-2)(x^3+3)=x^4-2x^3+3x-6$

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2-x+m-\sqrt{A}$

**Nếu cần biểu thức** $x^2-x+1-\sqrt{A}$

**thì** $A=(x^2-x+1)^2-(x-2)(x^3+3)=3x^2-5x+7$

**Nếu cần biểu thức** $x^2-x+2-\sqrt{B}$

**thì** $B=(x^2-x+2)^2-(x-2)(x^3+3)=5x^2-7x+10$

**Nếu cần biểu thức** $2x^2-2x+1-\sqrt{C}$

**thì** $C=(2x^2-2x+1)^2-4(x-2)(x^3+3)=8x^2-16x+25$

**Nếu cần biểu thức** $3x^2-3x+1-\sqrt{D}$

**thì** $D=(3x^2-3x+1)^2-9(x-2)(x^3+3)=15x^2-33x+55$

**Nếu cần biểu thức** $-x^2+x+4-\sqrt{E}$

**thì** $E=(-x^2+x+4)^2-(x-2)(x^3+3)=-7x^2+5x+22$

***Khi này dựa vào các biểu thức tạo ở trên các bạn thích tạo ra PT nhân liên hợp hay đưa về PT tích là tùy ý thích***

***Chẳng hạn***

***Pt giải bằng nhân liên hợp***

$$2\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{5x^2-7x+10}=3x^2-3x+4$$

$$\sqrt{3x^2-5x+7}+2\sqrt{8x^2-16x+25}=5x^2-5x+3$$

$$2\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{15x^2-33x+55}=5x^2-5x+3$$

Để tạo ra PT tích ta có thể làm theo hướng sau:

Ta nhận thấy từ cách tạo:

$$\sqrt{5x^2-7x+10}-\sqrt{3x^2-5x+7}-1=0$$

$$\sqrt{8x^2-16x+25}-2\sqrt{3x^2-5x+7}+1=0$$

$$\sqrt{-7x^2+5x+22}+\sqrt{3x^2-5x+7}-5=0$$

***Ta tạo ra PT tích như sau***

$$a)[\sqrt{5x^2-7x+10}-\sqrt{3x^2-5x+7}-1][\sqrt{5x^2-7x+10}+\sqrt{3x^2-5x+7}+2]=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+1+\sqrt{5x^2-7x+10}-3\sqrt{3x^2-5x+7}=0$$

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{3}$

$$b)[\sqrt{8x^2-16x+25}-2\sqrt{3x^2-5x+7}+1][\sqrt{8x^2-16x+25}+2\sqrt{3x^2-5x+7}+2]=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{8x^2-16x+25}-2\sqrt{3x^2-5x+7}=(2x-1)^2$$

**PT có 2 nghiệm** $x = 2; x = -\sqrt[3]{3}$

$$c)[\sqrt{-7x^2+5x+22}+\sqrt{3x^2-5x+7}-5][\sqrt{-7x^2+5x+22}-\sqrt{3x^2-5x+7}]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-7x^2+5x+22}-\sqrt{3x^2-5x+7}=-2x^2+2x+3$$

**PT có 4 nghiệm** $x = 2; x = -\sqrt[3]{3}; x = \dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

***(như vậy ai cũng đều có khả năng tự tạo ra được các phương trình tương tự các PT trong bài viết này)***

## *Một số phương trình khác*

***Pt nhiều nhân tử,Pt liên hợp có bậc 1,bậc 2,….***

***1.Giải phương trình***

$$3(x-2)\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}=x^4+4x^3-6x^2+x-8$$

***Nhân tử cần tìm là*** $x^2+1-\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}$

$$3(x-2)\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}=x^4+4x^3-6x^2+x-8$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x-5-x^2-1)\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}+(3-x)(x^2+x+1)-(x^2+1)(x^2+3x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}-(x^2+1)][\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}+x^2+3x-5]=0$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}-(x^2+1)][\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}+x^2+x+1-2(3-x)]=0$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{(3-x)(x^2+x+1)}-(x^2+1)][\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3-x}][\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{3-x}]=0$$

***Pt có 4 nghiệm*** $x=-1; x=\sqrt[3]{2}; x=-1\pm\sqrt{3}$

***2.Giải phương trình***

$$\sqrt{7x^2+2}+(x^2-1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2-x$$

***HD:đkxđ*** $x \ge \dfrac{-3}{2} \Rightarrow x+2>0$

$$\sqrt{7x^2+2}+(x^2-1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2-x$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{7x^2+2}-x^2-2]+(x^2-1)[\sqrt{4x+6}-x-2]=0$$

***Nhân liên hợp suy ra Pt có 4 nghiệm*** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$

***2.Giải phương trình***

$$\sqrt{7x^2+2}+(x^2-1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2-x$$

***HD:đkxđ*** $x\geq\frac{-3}{2}\Rightarrow x+2>0$

$$\sqrt{7x^2+2}+(x^2-1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2-x$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{7x^2+2}-x^2-2]+(x^2-1)[\sqrt{4x+6}-x-2]=0$$

***Nhân liên hợp suy ra Pt có 4 nghiệm*** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2+3}+(x^2-2)\sqrt{4x+7}=x^3+3x^2-2x-1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{11x^2+3}+(x^2-2)\sqrt{4x+7}=x^3+3x^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{11x^2+3}-x^2-3]+(x^2-2)[\sqrt{4x+7}-x-2]=0(đk: x\geq\frac{-7}{4})$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm\sqrt{2}; x=\pm\sqrt{3}$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$$\sqrt{19x^2+6}+2(x^2-1)\sqrt{3x+3}=2x^3+5x^2-2x$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{19x^2+6}+2(x^2-1)\sqrt{3x+3}=2x^3+5x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{19x^2+6}-2x^2-3]+(x^2-1)[2\sqrt{3x+3}-2x-3]=0(đk: x\geq -1)$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm 1; x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Thí dụ 5 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+6}+(x^2+1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2+x+4$$

**Hướng dẫn. đk:** $x\ge -1\Rightarrow x+2>0$

$$\sqrt{5x^2+6}+(x^2+1)\sqrt{4x+6}=x^3+3x^2+x+4$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{5x^2+6}-x^2-2]+(x^2+1)(\sqrt{4x+6}-x-2)=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=\pm\sqrt{2}$

**Chú ý:Tìm biểu thức liên hợp** $\sqrt{4x+6}-x-2$

**từ đó suy đoán biểu thức liên hợp** $\sqrt{5x^2+6}-x^2-2$

**Thí dụ 6 Giải phương trình**

$$\sqrt{3-3x^2}+(x^2+2)\sqrt{8x+5}=2x^3+4x^2+4x+5$$

**Hướng dẫn. đk:** $-1\le x\le 1\Rightarrow x+1\ge 0$

$$\sqrt{3-3x^2}+(x^2+2)\sqrt{8x+5}=2x^3+4x^2+4x+5$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{3-3x^2}-2x^2-1]+(x^2+2)(\sqrt{8x+5}-x-1)=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=\pm\frac{1}{2}$

**Thí dụ 7 Giải phương trình**

$$x^3+2x+3+\sqrt{3-3x^2}=(x^2+2)\sqrt{5x^2+4x+3}$$

**Hướng dẫn. đk:** $-1\le x\le 1\Rightarrow x+2\ge 0$

$$x^3+2x+3+\sqrt{3-3x^2}=(x^2+2)\sqrt{5x^2+4x+3}$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{3-3x^2}-2x^2-1]+(x^2+2)[x+2-\sqrt{5x^2+4x+3}]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=\pm\frac{1}{2}$

**Thí dụ 8 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2+5}+(x^2-4)\sqrt{4x+5}=x^3+3x^2-4x-5$$

**Hướng dẫn. đk:** $x\ge-\frac{5}{4}\Rightarrow x+2>0$

$$\sqrt{11x^2+5}+(x^2-4)\sqrt{4x+5}=x^3+3x^2-4x-5$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{11x^2+5}-x^2-3]+(x^2-4)[\sqrt{4x+5}-x-2]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 3 nghiệm** $x=\pm1; x=2$

**Thí dụ 9 Giải phương trình**

$$\sqrt{13x^2+12}+(x^2-1)\sqrt{6x+13}=x^3+4x^2-x+1$$

**Hướng dẫn. đk:** $x\ge-\frac{13}{6}\Rightarrow x+3>0$

$$\sqrt{13x^2+12}+(x^2-1)\sqrt{6x+13}=x^3+4x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{13x^2+12}-x^2-4]+(x^2-1)[\sqrt{6x+13}-x-3]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm1; x=\pm2$

**Thí dụ 10 Giải phương trình**

$$\sqrt{6x^2-6x+4}+(x^2-2x)\sqrt{4x+5}=x^3+x^2-5x+2$$

**Hướng dẫn.**

**đk:** $x\ge-\frac{5}{4}\Rightarrow x+2>0$

$$\sqrt{6x^2-6x+4}+(x^2-2x)\sqrt{4x+5}=x^3+x^2-5x+2$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{6x^2-6x+4}-x^2+x-2]+(x^2-2x)(\sqrt{4x+5}-x-2]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm1; x=0; x=2$

**Thí dụ 11 Giải phương trình**

$$\sqrt{8x^2-8x+1}+(x^2+2x)\sqrt{10x+6}=x^3+6x^2+5x+1$$

**Hướng dẫn. đk:** $x\geq -\frac{5}{3}\Rightarrow x+3>0$

$$\sqrt{8x^2-8x+1}+(x^2+2x)\sqrt{10x+6}=x^3+6x^2+5x+1$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{8x^2-8x+1}-x^2+x-1]+(x^2+2x)[\sqrt{10x+6}-x-3]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 3 nghiệm** $x=0; x=1; x=3$

**Thí dụ 12 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+2x}+(x+2)\sqrt[3]{3x^2+3x-1}=2x^2+4x+4$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2+2x}+(x+2)\sqrt[3]{3x^2+3x-1}=2x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2]+(x+2)[\sqrt[3]{3x^2+3x-1}-x-1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 13 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+1}+x^2+2x+4$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+1}+x^2+2x+4$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2]-(x+2)[1+\sqrt[3]{x^3+1}]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 14 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+3}+x^2$$

**Hướng dẫn.**

$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+3}+x^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2+(x+2)[1-\sqrt[3]{x^3+3}]=0$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 15 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+10}+x^2-x-2$

**Hướng dẫn.**

$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3+10}+x^2-x-2$

$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2]-(x+2)[\sqrt[3]{x^3+10}-2]=0$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 16 Giải phương trình**

$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3-6}+x^2+3x+6$

**Hướng dẫn.**

$\sqrt{5x^2+2x}=(x+2)\sqrt[3]{x^3-6}+x^2+3x+6$

$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2+2x}-x^2-x-2]-(x+2)[2+\sqrt[3]{x^3-6}]=0$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 17 Giải phương trình**

$\sqrt{7x^2+10x+1}+x.\sqrt[3]{x^2+7x+9}=2x^2+2x+1$

**Hướng dẫn.**

$\sqrt{7x^2+10x+1}+x.\sqrt[3]{x^2+7x+9}=2x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow [\sqrt{7x^2+10x+1}-x^2-x-1]+x[\sqrt[3]{x^2+7x+9}-x-1]=0$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm** $x=-2; x=2; x=0$

**Thí dụ 18 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}+(x-1)\sqrt[3]{12x^2+10x+1}=4x^2-2x+1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}+(x-1)\sqrt[3]{12x^2+10x+1}=4x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{11x^2-6x+4}-2x^2+x-2]+(x-1)[\sqrt[3]{12x^2+10x+1}-2x-1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Thí dụ 19 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}=(x-1)\sqrt[3]{2x^3-x+1}+2x^2-2x+3$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}=(x-1)\sqrt[3]{2x^3-x+1}+2x^2-2x+3$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{11x^2-6x+4}-2x^2+x-2]+(x-1)[1-\sqrt[3]{2x^3-x+1}]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Thí dụ 20 Giải phương trình**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}=(x-1)\sqrt[3]{2x^3-x-1}+2x^2+1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{11x^2-6x+4}=(x-1)\sqrt[3]{2x^3-x-1}+2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{11x^2-6x+4}-2x^2+x-2]-(x-1)[1+\sqrt[3]{2x^3-x-1}]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=1; x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Thí dụ 21 Giải phương trình**

$$\frac{\sqrt{10x^2+6}+(x^2-1)\sqrt{4x+7}-(x^2-3)\sqrt{2x^2+4x+3}}{x^2+2x+7}=1$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{\sqrt{10x^2+6}+(x^2-1)\sqrt{4x+7}-(x^2-3)\sqrt{2x^2+4x+3}}{x^2+2x+7}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10x^2+6}-x^2-3+\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{4x+7}-x-2\right)-(x^2-3)\left(\sqrt{2x^2+4x+3}-x-3\right)=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm1; x=\pm\sqrt{3}$ **.**

**Thí dụ 22 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+(x-2)\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=2x^2-2x-1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+(x-2)\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=2x^2-2x-1$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2-6x+1}-x^2+x-1]+(x-2)[\sqrt[3]{3x^2+5x+1}-x-1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 23 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+x.\sqrt[3]{-x^2+5x-5}=2x^2-2x+1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+x.\sqrt[3]{-x^2+5x-5}=2x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2-6x+1}-x^2+x-1+x.[\sqrt[3]{-x^2+5x-5}-x+1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 24 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+x.\sqrt[3]{5x^2+5x-3}=2x^2+1$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}+x.\sqrt[3]{5x^2+5x-3}=2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2-6x+1}-x^2+x-1]+x[\sqrt[3]{5x^2+5x-3}-x-1]=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 25 Giải phương trình**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}=3+(x-2)\sqrt{x^3+x^2+1}$$

**Hướng dẫn.**

$$\sqrt{5x^2-6x+1}=3+(x-2)\sqrt{x^3+x^2+1}$$

$$\sqrt{5x^2-6x+1}-x^2+x-1-(x-2)[\sqrt{x^3+x^2+1}-x-1]=0$$

**Nhân liên hợp và kiểm tra đkxđ suy ra PT có 3 nghiệm** $x=0; x=2; x=\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 26 Giải phương trình**

$$x-5+\sqrt{5x^2-6x+1}=(x-2)\sqrt{x^3+x^2+2x+4}$$

**Hướng dẫn.**

$$x-5+\sqrt{5x^2-6x+1}=(x-2)\sqrt{x^3+x^2+2x+4}$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{5x^2-6x+1}-x^2+x-1]-(x-2)[\sqrt{x^3+x^2+2x+4}-x-2]=0$$

**Nhân liên hợp và kiểm tra đkxđ suy ra PT có 4 nghiệm** $x=0; x=2; x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 27 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+4}{1+\sqrt{12x^2+1}}+\frac{(x^2-4)(x+3)}{1+\sqrt{4x+6}}=x^2-3$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+4}{1+\sqrt{12x^2+1}}+\frac{(x^2-4)(x+3)}{1+\sqrt{4x+6}}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+4}{1+\sqrt{12x^2+1}}-1+\frac{(x^2-4)(x+3)}{1+\sqrt{4x+6}}-(x^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+3-\sqrt{12x^2+1}}{1+\sqrt{12x^2+1}}+\frac{(x^2-4)(x+2-\sqrt{4x+6})}{1+\sqrt{4x+6}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ suy ra PT có 3 nghiệm** $x=2, x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 28 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+x+2}{x+\sqrt{7x^2+2}}+\frac{x^3+3x^2-x-3}{1+\sqrt{4x+6}}=x^2$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+x+2}{x+\sqrt{7x^2+2}}+\frac{x^3+3x^2-x-3}{1+\sqrt{4x+6}}=x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+2}{x+\sqrt{7x^2+2}}+\frac{(x^2-1)(x+3)}{1+\sqrt{4x+6}}=x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+2}{x+\sqrt{7x^2+2}}-1+\frac{(x^2-1)(x+3)}{1+\sqrt{4x+6}}-(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2-\sqrt{7x^2+2}}{x+\sqrt{7x^2+2}}+\frac{(x^2-1)(x+2-\sqrt{4x+6})}{1+\sqrt{4x+6}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm 1, x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 29 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{8x^2-8x+9}+x-2}+\frac{(x^2-4)(x+4)}{1+\sqrt{6x+10}}=x^2-3$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{8x^2-8x+9}+x-2}+\frac{(x^2-4)(x+4)}{1+\sqrt{6x+10}}=x^2-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{8x^2-8x+9}+x-2}-1+\frac{(x^2-4)(x+4)}{1+\sqrt{6x+10}}-(x^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3-\sqrt{8x^2-8x+9}}{x-2+\sqrt{8x^2-8x+9}}+\frac{(x^2-4)(x+3-\sqrt{6x+10})}{1+\sqrt{6x+10}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ**

**suy ra PT có 3 nghiệm** $x=\pm 1, x=2$**.**

**Thí dụ 30 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{6x^2+6x+4}-x}+\frac{(x^2+2x)(x+3)}{1+\sqrt{4x+5}}=(x+1)^2$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{6x^2+6x+4}-x}+\frac{(x^2+2x)(x+3)}{1+\sqrt{4x+5}}=(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{6x^2+6x+4}-x}-1+\frac{(x^2+2x)(x+3)}{1+\sqrt{4x+5}}-(x^2+2x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1-\sqrt{6x^2+6x+4}}{\sqrt{6x^2+6x+4}-x}+\frac{(x^2+2x)(x+2-\sqrt{4x+5})}{1+\sqrt{4x+5}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm1, x=0; x=2$**.**

**Thí dụ 31 Giải phương trình**

$$\frac{x^2+3}{1+\sqrt{7x^2+2}}+x^2-2=\frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+3}{1+\sqrt{7x^2+2}}+x^2-2=\frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{1+\sqrt{7x^2+2}}-1+x^2-1-\frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2-\sqrt{7x^2+2}}{1+\sqrt{7x^2+2}}+(x^2-1)\frac{\sqrt{x^2+2}-2}{\sqrt{x^2+2}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm1, x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 32 Giải phương trình(Vũ Hồng Phong THPT Tiên Du 1)**

$$\frac{x^2+2}{2+\sqrt{17x^2+2}}+2x^2-1=\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+2}}$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{x^2+2}{2+\sqrt{17x^2+2}}+2x^2-1=\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{2+\sqrt{17x^2+2}}-\frac{1}{2}+\frac{4x^2-1}{2}-\frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2-\sqrt{17x^2+2}}{2(2+\sqrt{17x^2+2})}+\frac{(4x^2-1)(\sqrt{x^2+2}-2)}{2\sqrt{x^2+2}}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu ĐKXĐ suy ra PT có 4 nghiệm** $x=\pm\frac{1}{2}, x=\pm\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 33 Giải phương trình**

$$x+6-\frac{8x+17}{x^2+x+3}=\sqrt{5x^2-1}$$

**Hướng dẫn.**

$$x+6-\frac{8x+17}{x^2+x+3}=\sqrt{5x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-1-(x^2+1+x+2)\sqrt{5x^2-1}+(x^2+1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{5x^2-1}-(x^2+1)][\sqrt{5x^2-1}-(x+2)]=0$$

**PT đã cho có 6 nghiệm** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$

**Để PT đã cho nhìn phức tạp hơn ta chuyển vế ,nhân liên hợp để đưa về các PT sau:**

$$x+4-\frac{8x+17}{x^2+x+3}=\frac{5(x^2-1)}{2+\sqrt{5x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+17}{x^2+x+3}+\frac{5x^2-2x-13-(x+4)\sqrt{5x^2-1}}{2+\sqrt{5x^2-1}}=0$$

**Thí dụ 34 Giải phương trình**

$$\frac{6x^2+(x^2+1)\sqrt{2x-1}}{x^2+\sqrt{2x-1}+2}=\sqrt{5x^2-1}$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{6x^2+(x^2+1)\sqrt{2x-1}}{x^2+\sqrt{2x-1}+2}=\sqrt{5x^2-1}\Leftrightarrow 6x^2+\left(x^2+1\right)\sqrt{2x-1}=\left(x^2+\sqrt{2x-1}+2\right)\sqrt{5x^2-1}$$

$\Leftrightarrow(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{2x-1}-1)=0$. **PT đã cho có 4 nghiệm** $x=\pm1; x=\pm\sqrt{2}$

**Thí dụ 35 Giải phương trình**

$$x^2-3+\frac{x^2+1}{\sqrt{7x^2+2}-1}=\frac{\left(x^2-2\right)\left(1+\sqrt{4x+5}\right)}{x+3}$$

**Hướng dẫn. ĐK:** $x\ge\frac{-5}{4}$

$$x^2-3+\frac{x^2+1}{\sqrt{7x^2+2}-1}=\frac{\left(x^2-2\right)\left(1+\sqrt{4x+5}\right)}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{\sqrt{7x^2+2}-1}-1+x^2-2-\frac{\left(x^2-2\right)\left(1+\sqrt{4x+5}\right)}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2-\sqrt{7x^2+2}}{\sqrt{7x^2+2}-1}+\frac{\left(x^2-2\right)\left(x+2-\sqrt{4x+5}\right)}{x+3}=0$$

**Nhân liên hợp và đối chiếu điều kiện suy ra PT có 3 nghiệm** $x=\pm1; x=\sqrt{2}$ **.**

**Thí dụ 36 Giải phương trình**

$$\frac{x^3+2x+\sqrt{7x^2+2}}{x^2+1+x\sqrt{5x^2-1}}=\frac{x^2+2+2\sqrt{7x^2+2}}{2x^2+2+\sqrt{5x^2-1}}$$

**Hướng dẫn.**

**Xem phần tạo ra PT Tích từ các biểu thức**

$$a=\sqrt{7x^2+2}; b=x^2+2; c=x^2+1; d=\sqrt{5x^2-1}$$

$$m=1; n=x; p=2; q=1$$

$$\frac{x^3+2x+\sqrt{7x^2+2}}{x^2+1+x\sqrt{5x^2-1}}=\frac{x^2+2+2\sqrt{7x^2+2}}{2x^2+2+\sqrt{5x^2-1}}$$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-1}}{x^2+1}-\frac{x^2+2}{\sqrt{7x^2 2}}=0$ **hoặc** $x^2=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-1}}{x^2+1}-1+1-\frac{x^2+2}{\sqrt{7x^2 2}}=0$ **hoặc** $x=\frac{1}{2}$

**Nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 5 nghiệm:** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\frac{1}{2}$

**Thí dụ 37 Giải phương trình**

$(2x+6)\sqrt{7x^2+2}+(3-x)\sqrt{16x^2-7}=12x^2+3x+15$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+2-\sqrt{7x^2+2}$

**và** $2x^2+1-\sqrt{16x^2-7}$

$(2x+6)\sqrt{7x^2+2}+(3-x)\sqrt{16x^2-7}=12x^2+3x+15$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{7x^2+2}-\sqrt{16x^2-7}-3)(2\sqrt{7x^2+2}+\sqrt{16x^2-7}-x)=0$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}$

**Chú ý:** $2\sqrt{7x^2+2}-x>2\sqrt{7x^2}-x\ge |x|-x\ge 0$

**Thí dụ 38 Giải phương trình**

$(2x-6)\sqrt{8x^2+1}-(x+3)\sqrt{20x^2-11}+12x^2-3x+15=0$

**Hướng dẫn.**

**Biểu thức liên hợp cần tìm là** $x^2+2-\sqrt{8x^2+1}$

**và** $2x^2+1-\sqrt{20x^2-11}$

$(2x-6)\sqrt{8x^2+1}-(x+3)\sqrt{20x^2-11}+12x^2-3x+15=0$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{8x^2+1}-\sqrt{20x^2-11}-3)(2\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{20x^2-11}+x)=0$

**PTcó 4 nghiệm** $x=\pm1; x=\pm\sqrt{3}$

**Chú ý:** $2\sqrt{8x^2+1}+x>2\sqrt{8x^2}+x\ge|x|+x\ge 0$

**Thí dụ 39 Giải phương trình**

$$\frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+\frac{2x^2+1}{3x^2-4x+5+(x-2)\sqrt{3x^2-4x+5}}=1+\sqrt{3x^2-4x+5}$$

**Hướng dẫn.**

$$\frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+\frac{2x^2+1}{3x^2-4x+5+(x-2)\sqrt{3x^2-4x+5}}=1+\sqrt{3x^2-4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+\frac{\left(\sqrt{3x^2-4x+5}+x-2\right)\left(\sqrt{3x^2-4x+5}-x+2\right)}{\sqrt{3x^2-4x+5}\left(x-2+\sqrt{3x^2-4x+5}\right)}=1+\sqrt{3x^2-4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+\frac{\left(\sqrt{3x^2-4x+5}-x+2\right)}{\sqrt{3x^2-4x+5}}=1+\sqrt{3x^2-4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+1+\frac{2-x}{\sqrt{3x^2-4x+5}}=1+\sqrt{3x^2-4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}+\frac{2-x}{\sqrt{3x^2-4x+5}}=\sqrt{3x^2-4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}=\frac{3(x^2-x+1)}{\sqrt{3x^2-4x+5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{3x^2-4x+5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}-1+1-\frac{x^2-x+1}{\sqrt{3x^2-4x+5}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2-6x+8}-(x^2-x+2)}{x^2-x+2}+\frac{\sqrt{3x^2-4x+5}-(x^2-x+1)}{\sqrt{3x^2-4x+5}}=0$$

**Nhân liên hợp suy ra PT có 2 nghiệm là** $x=2; x=-\sqrt[3]{3}$

**Nhận xét:Thí dụ 39 Xuất phát là Giải phương trình** $\dfrac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{3x^2-4x+5}}$

**Thí dụ 40**

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-1)(\sqrt{3x^2-4x+5}-2x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x+1)\sqrt{3x^2-4x+5}=2x^3+x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}=\dfrac{2x^3+x^2-2x+5}{x^2+x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}=2x-1+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}$ (*)

**Để ngụy trang tiếp PT(*) ta có một số hướng sau:**

**hướng 1** $(*)\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}-(x-2)=x+1+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+1}{x-2+\sqrt{3x^2-4x+5}}=x+1+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}$ **(ở đây ta đã nhân liên hợp để ngụy trang)**

**hướng 2** $(*)\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{3x^2-4x+5}+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{2x-1+\sqrt{3x^2-4x+5}}+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}=0$ **(ở đây ta đã nhân liên hợp để ngụy trang)**

$\Rightarrow \dfrac{x+2}{2x-1+\sqrt{3x^2-4x+5}}=\dfrac{3}{x^2+x+1}$

**(ở đây ta bỏ bớt 1 nhân tử có chứa nghiệm PT ban đầu)**

**Thí dụ 40 Giải phương trình**

$a)\ \dfrac{2x^2+1}{x-2+\sqrt{3x^2-4x+5}}=x+1+\dfrac{6-3x}{x^2+x+1}$

**PT có 3 nghiệm là** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}; x=1$

$b)\dfrac{x+2}{2x-1+\sqrt{3x^2-4x+5}}=\dfrac{3}{x^2+x+1}$

**PT có 2 nghiệm là** $x=-\sqrt[3]{2}; x=1$

### Thí dụ 41

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(x\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (x^3+x+x^2+1)\sqrt{5x^2-1}=(x^2+1)^2+5x^3-x$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)\sqrt{5x^2-1}=(x^2+1)^2+5x^3-x$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{5x^2-1}=x^2+1+\dfrac{5x^3-x}{x^2+1}$

**Giải phương trình** $(x+1)\sqrt{5x^2-1}=x^2+1+\dfrac{5x^3-x}{x^2+1}$

**Chú ý: giải phương trình** $x\sqrt{5x^2-1}-x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x\sqrt{5x^2-1}=x^2+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2(5x^2-1)=(x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

**PT có 4 nghiệm là** $x=\pm1; x=\pm\sqrt{2}$

## Thí dụ 42

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(x\sqrt{5x^2-1}-x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^3+x^2+x+2)\sqrt{5x^2-1}=5x^3-x+(x^2+1)(x^2+2)$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x+1)\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{5x^2-1}=5x^3-x+(x^2+1)(x^2+2)$

$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{5x^2-1}=x^2+2+\dfrac{5x^3-x-\sqrt{5x^2-1}}{x^2+1}$

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(x\sqrt{5x^2-1}-x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow (x^3+x^2+x+2)\sqrt{5x^2-1}=x^4+5x^3+3x^2-x+2$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2+7x+6}{x^3+x^2+x+2}=x+4-\sqrt{5x^2-1}$

**Thí dụ 42 Giải phương trình(Vũ Hồng Phong)**

$a)\dfrac{2x^2+7x+6}{x^3+x^2+x+2}=x+4-\sqrt{5x^2-1}$

**PT có 5 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{89}}{8}}$

$b)(x+1)\sqrt{5x^2-1}=x^2+2+\dfrac{5x^3-x-\sqrt{5x^2-1}}{x^2+1}$

**PT có 5 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{89}}{8}}$

**Chú ý: giải phương trình** $x\sqrt{5x^2-1}-x^2-2=0$

$\Leftrightarrow x\sqrt{5x^2-1}=x^2+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2(5x^2-1)=(x^2+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{89}}{8}}$

## Thí dụ 43

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(\sqrt{5x^2-1}-x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x+1)\sqrt{5x^2-1}=x^3+5x^2+x-1$

$\Rightarrow \dfrac{4x^2-1}{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2-1}-x$

## Thí dụ 43 **giải phương trình** $\dfrac{4x^2-1}{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2-1}-x$

**PT có 5 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\dfrac{1}{2}$

**Như vậy việc tạo ra được một phương trình TÍCH là không quá khó khăn và có nhiều cách để tạo ra. Xin giới thiệu tiếp cách tạo ra PT Tích dạng phức tạp hơn**

## Thí dụ 44

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{8x^2-1}-3x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x+1)\sqrt{5x^2-1}+\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-1}\right)\sqrt{8x^2-1}=3x^3+5x^2+3x-1$

**PT có 5 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\dfrac{1}{2}$

**Giải phương trình** $\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{8x^2-1}-3x=0$

**Ngoài cách chuyển -3x rồi bình phương thì còn cách đặt ẩn phụ. Cụ thể như sau**

$\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{8x^2-1}-3x=0 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2-1}+\sqrt{5x^2-1+3x^2}-3x=0$

**đặt ẩn phụ** $\sqrt{5x^2-1}=a; b=x$

## Thí dụ 45

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{8x^2-1}-x)=0$

$\Leftrightarrow (3x^2+x+3)\sqrt{5x^2-1}-\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-1}\right)\sqrt{8x^2-1}=x^3+15x^2+x-3$

**Ta có Giải phương trình**

$(3x^2+x+3)\sqrt{5x^2-1}-\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-1}\right)\sqrt{8x^2-1}=x^3+15x^2+x-3$

**PT có 6 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{-4}{\sqrt{79}}$

**Giải phương trình** $3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{8x^2-1}-x=0$

**Ngoài cách chuyển -x rồi bình phương thì còn cách đặt ẩn phụ. Cụ thể như sau**

$3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{8x^2-1}-x=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{5x^2-1+3x^2}-x=0$

**đặt ẩn phụ** $\sqrt{5x^2-1}=a;b=x$

## Thí dụ 46

**Xuất phát từ**

**phương trình** $(\sqrt{5x^2-1}-x^2-1)(3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-1}-x)=0$

$\Leftrightarrow (3x^2+x+3)\sqrt{5x^2-1}-\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-1}\right)\sqrt{8x^2-1}=x^3+15x^2+x-3$

**Ta có Giải phương trình**

$(3x^2+x+3)\sqrt{5x^2-1}-\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-1}\right)\sqrt{9x^2-1}=x^3+15x^2+x-3$

**PT có 6 nghiệm là** $x=\pm 1; x=\pm\sqrt{2}; x=\pm\sqrt{\dfrac{2(139+3\sqrt{33})}{1189}}$

**Giải phương trình** $3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{8x^2-1}-x=0$

**Ngoài cách chuyển -x rồi bình phương thì còn cách đặt ẩn phụ. Cụ thể như sau**

$3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2-1}-x=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{2(5x^2-1)-x^2}-x=0$

**đặt ẩn phụ** $\sqrt{5x^2-1}=a;b=x$

## Thí dụ 47

**Xuất phát từ PT** $(x-2)(x^3+2)=0$

**Tạo ra biểu thức** $x^2-x+1-\sqrt{A}$ **và biểu thức** $x^2-x+2-\sqrt{B}$

**Như sau:** $A=(x^2-x+1)^2-(x-2)(x^3+2)=3x^2-4x+5$

$B=(x^2-x+2)^2-(x-2)(x^3+2)=5x^2-6x+8$

**Suy ra có PT mà** $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-4x+5}+x-1}=$ **ứng với** $\dfrac{1}{x^2}$ **vế bên kia PT**

$\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-6x+8}+x-2}=$ **ứng với** $\dfrac{1}{x^2}$ **vế bên kia PT**

**có thể tạo ra PT** $\frac{1}{\sqrt{3x^2-4x+5}+x-1}+\frac{1}{\sqrt{5x^2-6x+8}+x-2}=\frac{2}{x^2}$

**nhân liên hợp ta được PT cần tạo ra như sau:**

$$\frac{\sqrt{3x^2-4x+5}-x+1}{2x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}-x+2}{4x^2-2x+4}=\frac{2}{x^2}$$

**Ta có Giải phương trình** $\frac{\sqrt{3x^2-4x+5}-x+1}{x^2-x+2}+\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}-x+2}{2x^2-x+2}=\frac{4}{x^2}$

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

**có thể tạo ra PT** $\frac{1}{\sqrt{3x^2-4x+5}+x-1}+\frac{2}{\sqrt{5x^2-6x+8}+x-2}=\frac{3}{x^2}$

**Tương tự ta có Giải phương trình** $\frac{\sqrt{3x^2-4x+5}-x+1}{2x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}-x+2}{2x^2-x+2}=\frac{3}{x^2}$

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

## Thí dụ 48

**Xuất phát từ PT** $(x-2)(x^3+2)=0 \Rightarrow \frac{2x^3-2x+3}{x^2+1}=x^2-1$

**Biểu thức liên hợp đã biết** $x^2-x+1-\sqrt{3x^2-4x+5}$

**Ta có thể tạo ra PT** $\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{\frac{2x^3-2x+3}{x^2+1}}=x^2-x+1+\sqrt{x^2-1}$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}+x-1+\sqrt{\frac{2x^3-2x+3}{x^2+1}}=x^2+\sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-2x+4}{\sqrt{3x^2-4x+5}-x+1}+\sqrt{\frac{2x^3-2x+3}{x^2+1}}=x^2+\sqrt{x^2-1}$$

**Ta có Giải phương trình** $\frac{2x^2-2x+4}{\sqrt{3x^2-4x+5}-x+1}+\sqrt{\frac{2x^3-2x+3}{x^2+1}}=x^2+\sqrt{x^2-1}$

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

## Thí dụ 49

**Xuất phát từ PT** $(x-2)(x^3+2)=0$

**Tạo ra biểu thức** $x^2-x+1-\sqrt{A}$ **và biểu thức** $x^2-x+2-\sqrt{B}$

**Như sau:** $A=(x^2-x+1)^2-(x-2)(x^3+2)=3x^2-4x+5$

$B=(x^2-x+2)^2-(x-2)(x^3+2)=5x^2-6x+8$

**Nếu muốn kết hợp Nhị thức NiuTơn suy ra** $(x-1)^5+(x+1)^5=2x(x^4+10x^2+5)$

**Ta có Giải phương trình** $\dfrac{\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8}\right)^5+\left(x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5}\right)}{x^4+10x^2+5}=2x$

**Hướng dẫn giải:**

$$\frac{\left(x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8}\right)^5+\left(x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5}\right)}{x^4+10x^2+5}=2x$$

**Bấm máy tính tìm được** $X=2; X=-1{,}25992105$

**Các biểu thức cần xuất hiện** $x^2-x+1-\sqrt{3x^2-4x+5}\,;x^2-x+2-\sqrt{5x^2-6x+8}$

**Suy ra** $x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8}=x-1\,;x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5}=x+1$

$$PT\Leftrightarrow(x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8})^5+(x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5})^5=2x(x^4+10x^2+5)$$

$$\Leftrightarrow(x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8})^5+(x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5})^5=(x-1)^5+(x+1)^5$$

$$\Leftrightarrow(x^2+1-\sqrt{5x^2-6x+8})^5-(x-1)^5+(x^2+2-\sqrt{3x^2-4x+5})^5-(x+1)^5=0$$

**Sử dụng hằng đẳng thức rồi nhân liên hợp suy ra PT đã cho có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

## Thí dụ 50

**Xuất phát từ PT** $(x-2)(x^3+2)=0$

**Tạo ra biểu thức** $x^2-x+1-\sqrt{A}$ **và biểu thức** $x^2-x+2-\sqrt{B}$

**Như sau:** $A=(x^2-x+1)^2-(x-2)(x^3+2)=3x^2-4x+5$

$B=(x^2-x+2)^2-(x-2)(x^3+2)=5x^2-6x+8$

**Các biểu thức cần xuất hiện** $x^2-x+1-\sqrt{3x^2-4x+5}$ ; $x^2-x+2-\sqrt{5x^2-6x+8}$

**Để PT có căn trong căn thì từ trên ta Suy ra** $\sqrt{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}=1$

**Ta có Giải phương trình** $\sqrt{\dfrac{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}{5x^2-6x+8}}=\dfrac{1}{x^2-x+2}$

**Hướng dẫn giải:**

$$\sqrt{\frac{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}{5x^2-6x+8}}=\frac{1}{x^2-x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}=\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}-1=\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}-1$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{x^2-x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}-1]+\frac{x^2-x+2-\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}=0$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở biểu thức đầu,1 lân ở phân thức sau suy ra**

**PT có 2 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

**Để PT có dấu giá trị tuyệt đối cũng không khó khăn gì. Ta có**

$$\sqrt{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}=\sqrt{2x^2+x+2-(x^2-x+1)}=|x+1|$$

**Giải phương trình** $\sqrt{\dfrac{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}{5x^2-6x+8}}=\dfrac{|x+1|}{x^2-x+2}$

**Hướng dẫn giải:**

$$\sqrt{\frac{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}{5x^2-6x+8}}=\frac{|x+1|}{x^2-x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}}{|x+1|}=\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}\ (xét\, x\neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}}{|x+1|}-1=\frac{\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}-1(xét x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2+x+2-\sqrt{3x^2-4x+5}}-|x+1|}{|x+1|}+\frac{x^2-x+2-\sqrt{5x^2-6x+8}}{x^2-x+2}=0(xét x \neq -1)$$

**Nhân liên hợp 2 lần ở biểu thức đầu,1 lân ở phân thức sau suy ra**

**Phương trình có 2 nghiệm** $x=2, x=-\sqrt[3]{2}$

## Thí dụ 51 Để kết hợp với Đạo hàm

**Từ Phương trình** $\left(2\sqrt{3x^2+1}-x^2-3\right)(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{\sqrt{2}x}-7)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{13x^2+23+2\sqrt{3\sqrt{2}x^3+\sqrt{2}x}-14\sqrt{3x^2+1}}{(x^2+3)(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{\sqrt{2}x})}=1$$

**Giải phương trình** $\frac{13x^2+23+2\sqrt{3\sqrt{2}x^3+\sqrt{2}x}-14\sqrt{3x^2+1}}{(x^2+3)(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{\sqrt{2}x})}=1$

**Phương trình có 3 nghiệm** $x=1; x=\sqrt{5}; x=2\sqrt{2}$

**Phương trình** $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{\sqrt{2}x}-7=0$ **có vế trái là hàm đồng biến nên có nghiệm** $x=2\sqrt{2}$ **là nghiệm duy nhất**

## Thí dụ 52 Để kết hợp với Đạo hàm

**Từ Phương trình** $\left(\sqrt{3x^2-3}-x^2+x-1\right)(\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{2x-1}-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-x-2+\sqrt{6x^3-3x^2-6x+3}-\sqrt{3x^2-3}}{(x^2-x+1)(\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{2x-1})}=1$$

**Giải phương trình** $\frac{4x^2-x-2+\sqrt{6x^3-3x^2-6x+3}-\sqrt{3x^2-3}}{(x^2-x+1)(\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{2x-1})}=1$

**Phương trình có 3 nghiệm** $x=1; x=2; x=\sqrt[3]{2}$

**Phương trình** $\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{2x-1}-1=0$ **có vế trái là hàm đồng biến có nghiệm** $x=1$

**Làm thế nào khi sáng tác ngoài cách mò nghiệm đẹp bằng nhẩm thì còn cách mò bằng máy tính Casio như sau: Bấm MODE 7 nhập** $F(X)=\sqrt{3X^2-3}$

**Máy hỏi Start bấm -9, End bấm 9**

**Quan sát bảng ta thấy F(X) giá trị nguyên khi X là -7,-2;-1;1;2;7**

**ở ví dụ TRÊN TÁC GiẢ chọn x=1, Bây giờ xin thử thêm với x=-2**

**Từ Phương trình** $\left(\sqrt{3x^2-3}-x^2+x-1\right)\left(\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x+3}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-2x-1-(2+\sqrt{x+3})\sqrt{3x^2-3}}{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x+3}$$

**Khi này giải PT** $\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x+3}-2=0$ **bằng cách đặt** $\sqrt{x+3}=t$

**suy ra PTcó 2 nghiệm** $x=-2; x=\frac{5+\sqrt{129}}{6}$

**Giải phương trình** $\frac{5x^2-2x-1-(2+\sqrt{x+3})\sqrt{3x^2-3}}{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x+3}$

**suy ra PTcó 4 nghiệm** $x=2; x=\sqrt[3]{2}; x=-2; x=\frac{5+\sqrt{129}}{6}$

**Thử thêm với x=7**

**Từ Phương trình** $\left(\sqrt{3x^2-3}-x^2+x-1\right)\left(\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{\frac{3x-1}{5}}-14\right)=0$

**Với PT** $\sqrt{3x^2-3}+\sqrt{\frac{3x-1}{5}}-14=0$ **có vế trái là hàm đồng biến nên có nghiệm x=7**

**là nghiệm duy nhất . các bạn tự tạo ra PT trong trường hợp này**

## Thí dụ 52 Dùng máy tính Casio trợ giúp sáng tác PT

**Làm thế nào khi sáng tác ngoài cách mò nghiệm đẹp mò bằng máy tính Casio như sau:**
**Bấm MODE 7 chăng hạn nhập** $F(X)=\sqrt{3X^2+4X+5}$

**Máy hỏi Start bấm -9, End bấm 9**

**Quan sát bảng ta thấy F(X) giá trị nguyên khi X là -5,-2;1;2;7**

**Như vậy có khá nhiều lựa chọn nghiệm đẹp chẳng hạn tác giả chọn x=-2**

**Để tạo ra PT dùng tính đơn điệu để giải ta tạo ra PT:**

$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{1-4x}-8=0(*)$

**Chỉ cần biết tính đơn điệu của hàm số** $y=3x^2-4x+5$

**thì sẽ biết tại sao tác giả chọn** $\sqrt{1-4x}$

**Có Vế trái PT(*) là hàm nghịch biến trên khoảng trên khoảng xác định** $(-\infty;\frac{1}{4}]$ **nên có nghiệm duy nhất x=-2**

**Khi này ta có PT tích dạng như sau:**

$(\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{1-4x}-8)(\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow 11x^2-12x+13+(\sqrt{1-4x}-8)\sqrt{3x^2-4x+5}=(x^2-x+1)(\sqrt{1-4x}+\sqrt{3x^2-4x+5})$

$\Leftrightarrow \dfrac{11x^2-12x+13+(\sqrt{1-4x}-8)\sqrt{3x^2-4x+5}}{(x^2-x+1)(\sqrt{1-4x}+\sqrt{3x^2-4x+5})}=1$

**PT có 2 nghiệm** $x=-2;x=-\sqrt[3]{2}$

**Khi này khi giải PT nếu bạn nào thử dùng Casio tìm nhân tử thì ta tìm nghiệm đẹp ngoại lai (kiểu ngoại lai này tác giả đã nói đến ở phần trước)bằng cách coi** $\sqrt{1-4x}=0$ **ta giải PT sau:** $11x^2-12x+13-8\sqrt{3x^2-4x+5}=(x^2-x+1)(\sqrt{3x^2-4x+5})(**)$

**ta tìm nghiệm đẹp ngoại lai x=2.Khi này một nhân tử cần tìm là:**

$\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-1=0$

**Từ (**) ta còn thu về được một PT sau:** $\sqrt{3x^2-4x+5}=\dfrac{11x^2-12x+13}{x^2-x+9}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}=11x-\dfrac{x+86}{x^2-x+9} \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}+\dfrac{x+86}{x^2-x+9}=11x$

**Cách giải** $pT \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2-4x+5}-8)(\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-1)=0$

**PT có 4 nghiệm** $x=2; x=-\sqrt[3]{2}; x=\dfrac{2\pm\sqrt{181}}{3}$

**Nếu các bạn thích tạo ra một PT Tích có thêm cách đặt ẩn phụ ở một nhân tử thì có thể làm như sau:**

**Tác giả xin chọn x=1;x=2;…..**

**Và tạo ra một số PT:**

$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{2x-1}-3=0$ **nghiệm** $x=1$

$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{x}-3=0$ **nghiệm** $x=1$

$\sqrt{3x^2-4x+5}-\sqrt{2x-1}-1=0$ **nghiệm** $x=1; x=1-2.\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{2}{3-\sqrt{13}}}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{3+\sqrt{13}}}}{3}$

$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{x+3}-4=0$ **nghiệm** $x=1; x=\dfrac{13-\sqrt{177}}{6}$

$\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{2-x}-3=0$ **nghiệm** $x=1; x=2$

$\sqrt{3x^2-4x+5}-\sqrt{2-x}-1=0$ **nghiệm** $x=1; x=1+\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{37}-11}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2\sqrt{37}-11}}}{3}$

$\sqrt{3x^2-4x+5}-3\sqrt{2-x}+1=0$ **nghiệm** $x=1; x=-2$

$\sqrt{3x^2-4x+5}-\sqrt{3x-2}-1=0$ **nghiệm** $x=1; x=2$

$\sqrt{3x^2-4x+5}-\sqrt{2-x}-3=0$ **nghiệm** $x=2; x=-2$

**bạn nào không thích nghiệm đẹp thì có thể tạo ra PT kiểu sau:**

$\sqrt{3x^2-4x+5}+2\sqrt{x+3}-2=0$ **có 2 nghiệm** $x=\dfrac{5+4\sqrt{6}}{3}; x=\dfrac{5-4\sqrt{6}}{3}$

**Việc ghép lại thành phương trình hoàn thiện xin dành cho bạn đọc. chẳng hạn:**

$(\sqrt{3x^2-4x+5}+\sqrt{x+3}-4)(\sqrt{3x^2-4x+5}-x^2+x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2-8x+9+(\sqrt{x+3}-4)\sqrt{3x^2-4x+5}}{(x^2-x+1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x^2-4x+5})}=1$$

**PT có 4 nghiệm:** $x=1; x=\frac{3-\sqrt{177}}{2}; x=2; x=-\sqrt[3]{2}$

## Sử dụng lí thuyết của 2 chuyên đề dưới đây có thể tìm ra các biểu thức cần xuất hiện ở 2 chuyên đề 2 và 3

***KĨ THUẬT "ĐÁNH CẢ CỤM" KHI DÙNG CASIO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ***

Chuyên đề 4

### PHƯƠNG PHÁP THẾ TRONG THỦ THUẬT SỬ DỤNG MÁY TÍNH ĐỂ TÌM NHÂN TỬ CHUNG HOẶC TÌM BIỂU THỨC TRONG NHÂN LIÊN HỢP KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

*Vũ Hồng Phong GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*

**Một kĩ năng rất hữu ích có thể giúp ta giải được một phương trình vô tỉ là kĩ năng tìm nhân tử chung hoặc tìm biểu thức trong nhân liên hợp. Đôi khi việc tìm ra các biểu thức đó là rất khó khăn nếu ta không có máy tính cầm tay trợ giúp. Bài viết này xin được giới thiệu kĩ thuật dùng máy tính cầm tay tìm nhân tử chung hoặc biểu thức để ta xử lí nhân liên hợp có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt[k]{P(x)}$ **,với a,b,c là các số nguyên. Sau đây là các thí dụ**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\frac{x^6-3x^4+3x^3+6x-10}{4x^2+1+2\sqrt{x^2-3x+6}}=2$$

**Lời giải**

**Phương trình(PT) đã cho tương đương với PT:**

$$x^6-3x^4+3x^3-8x^2+6x-12-4\sqrt{x^2-3x+6}=0(1)$$

**Ta tìm nghiệm của PT(1) bằng máy tính CASIO fx-570VN PLUS như sau:**

**Nhập biểu thức vế trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm X=2**

**Ấn nút sang trái để quay lại PT(1)**

**Sửa biểu thức thành VT(1):( X-2) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm** $-10$ **=, máy cho ta nghiệm** $X=-2,546818277$

**Bấm SHIFT STO A (lưu nghiệm vừa tìm vào A)**

**Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{x^2-3x+6}$

**chứa 2 nghiệm vừa tìm.**

**Nghiệm X=2 suy ra** $4a+2b+c-2=0 \Rightarrow c=-4a-2b+2$

**Nhân tử của PT(1) trở thành:** $ax^2+bx-4a-2b+2-\sqrt{x^2-3x+6}$
$=a(x-2)(x+2)+b(x-2)+2-\sqrt{x^2-3x+6}$

**Xét** $a(x-2)(x+2)+b(x-2)+2-\sqrt{x^2-3x+6}=0$

**suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+6}-2}{x-2}-a(x+2)$ **(2)**

Vì A là nghiệm của PT(2) nên

ta tìm a,b là số nguyên bằng cách bấm máy tính như sau:

**MODE 7 máy hiện f(X)= ,ta nhập** $\dfrac{\sqrt{A^2-3A+6}-2}{A-2}-(A+2)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=1=a thì F(X)=0=b là số nguyên**

**Như vậy a=1,b=0,c=**$-2$

**Nên nhân tử cần tìm là** $x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6}$

**Suy ra PT xuất hiện** $4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})$

**Biểu thức còn lại là** $x^6-3x^4+3x^3-12x^2+6x-4$

**Biểu thức này chứa nhân tử cần tìm nên nó chứa nhân tử sau:**

$(x^2-2)^2-(x^2-3x+6)=x^4-5x^2+3x-2$

**Thật vậy,sử dụng kĩ năng chia đa thức ta được**

$x^6-3x^4+3x^3-12x^2+6x-4=(x^4-5x^2+3x-2)(x^2+2)$

**Do đó**

$PT(1)\Leftrightarrow (x^4-5x^2+3x-2)(x^2+2)+4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})(x^2-2+\sqrt{x^2-3x+6})(x^2+2)+4(x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2-\sqrt{x^2-3x+6})\left(x^4+(x^2+2)\sqrt{x^2-3x+6}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-3x+6}=x^2-2(3)\\ x^4+(x^2+2)\sqrt{x^2-3x+6}=0(4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$$PT(3)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2\ge 0\\ x^2-3x+6=x^4-4x^2+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2\ge 0\\ (x-2)(x^3+2x^2-x+1)=0\end{cases}$$

Giải tiếp ta được nghiệm $x=2$ và $x=\dfrac{-2-\sqrt[3]{\dfrac{61+9\sqrt{29}}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x=2$ **;** $x=\dfrac{-2-\sqrt[3]{\dfrac{61+9\sqrt{29}}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$\frac{2x^4+x^3+2x^2+6x}{3+(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$2x^4+x^3+2x^2+6x-3-(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0(1)$

**Nhập biểu thức vế trái của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm** $X = 2{,}25992105$

**Bấm SHIFT STO A**

**Nhập biểu thức** $VT(1):(X-A)^4$ **rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 0 = , chờ gần 6 phút máy hiện Can't Solve**

Khi này ta sẽ chuyển sang hướng tìm nghiệm ngoại lai (nếu có)của PT bằng cách đổi dấu trước căn PT đã cho.Dẫn tới tìm nghiệm của PT sau:

$$2x^4+x^3+2x^2+6x-3+(x^2+2)\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0(2)$$

Ta tìm nghiệm "đẹp" (nếu có) của PT(2) như sau:

Bấm **MODE 7** máy hiện f(X)=

Ta nhập biểu thức vế trái PT(2) bấm =

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Khi này xem bảng ta thấy** $X=-1$ **thì F(X)=0**

**Vậy nghiệm ngoại lai cần tìm là x= -1**

**Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

**Vì x= -1 nghiệm ngoại lai nên nó là nghiệm PT:** $ax^2+bx+c+\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0$

**suy ra** $a-b+c+2=0 \Rightarrow c=-a+b-2$

**Nhân tử của PT(*) trở thành:** $ax^2+bx-a+b-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

$=a(x-1)(x+1)+b(x+1)-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

**Xét** $a(x-1)(x+1)+b(x+1)-2-\sqrt{8x^3+9x^2+3}=0$

**suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{8x^3+9x^2+3}+2}{x+1}-a(x-1)\in Z$

Ta tìm a,b bằng cách bấm máy tính như sau:

**MODE 7 máy hiện f(X)= ,ta nhập** $\dfrac{\sqrt{8A^3+9A^2+3}+2}{A+1}-(A-1)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=1 thì F(X)=3 là số nguyên**

**Như vậy a=1,b=3,c=0.**Ta được nhân tử là $x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2+3}$

Mà $(x^2+3x)^2-(8x^3+9x^2+3)=x^4-2x^3-3$

**PT(1) trở thành:** $x^4-2x^3-3+(x^2+2)(x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2-6})=0$

$\Leftrightarrow (x^2+3x-\sqrt{8x^3+9x^2-6})(2x^2+3x+2+\sqrt{8x^3+9x^2+3})=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{8x^3+9x^2+3}=x^2+3x(3)\\ 2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}+\sqrt{x^2-3x+6}=0(4)\end{array}\right.$$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$$PT(3)\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+3x\ge 0\\ (x+1)\left((x-1)^3-2\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}\,.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt[3]{2}$

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$\frac{2\sqrt{5x^2-3x+2}-x}{1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$2\sqrt{5x^2-3x+2}-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}-x-1=0(1)$

Ta tìm nghiệm "đẹp" (nếu có) của PT(1) như sau:

**Bấm MODE 7** máy hiện f(X)=

Ta nhập biểu thức vế trái PT(1) bấm =

**Máy hiện Start? Ta bấm -9 =**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Khi này ta thấy X=1 thì F(X)=0**

**Nhập biểu thức VT(1):( X-1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi X=? ta bấm** $0$ **=, máy cho ta nghiệm** $X = -0{,}629960524$

Làm tương tự các thí dụ trên ta được: $b = \dfrac{\sqrt{5x^2-3x+2}-2}{x-1} - a(x+1)$ **và**

$$b = \frac{\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}-2}{x-1} - a(x+1)$$

**Nên** $\sqrt{5x^2-3x+2}-(2x^2-x+1)$ **và** $4x^2-3x+1-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}$

**là các biểu thức cần xuất hiện trong phương trình**

PT(1) trở thành: $2(\sqrt{5x^2-3x+2}-2x^2+x-1)+(4x^2-3x+1-\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4})=0$

$$\Leftrightarrow 2\times\frac{5x^2-3x+2-\left(2x^2-x+1\right)^2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+2x^2-x+1}+\frac{\left(4x^2-3x+1\right)^2-36x^4+44x^3-17x^2+x+4}{4x^2-3x+1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^4-4x^3+x-1\right)\left[\frac{-2}{\sqrt{5x^2-3x+2}+2x^2-x+1}+\frac{-5}{4x^2-3x+1+\sqrt{36x^4-44x^3+17x^2-x-4}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4-4x^3+x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^3+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn.

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=1$; $x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

**Thí dụ 4 Giải phương trình**

$$\frac{x^4-2x^3+14-\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}}{x^2-5x+8+\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$$\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}+\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}-x^4+2x^3+x^2-5x-6=0(1)$$

Bấm máy tính như các thí dụ trên để tìm nghiệm nguyên ta thấy không có

Tìm và lưu các nghiệm ta được ít nhất 3 nghiệm là

$A=2,732050808$ ; $B=1,414213562$; $C=-0,732050807$

**Chú ý: Nếu máy hiện Continue:[=] thì ta bấm = ,đợi một lúc ta được nghiệm**

**Giả sử biểu thức thứ nhất có dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}$

Do A,B,C là nghiệm của biểu thức nên ta có

$$aA^2+bA+c=\sqrt{4A^3+7A^2-2A-3}$$

$$aB^2+bB+c=\sqrt{4B^3+7B^2-2B-3}$$

$$aC^2+bC+c=\sqrt{4C^3+7C^2-2C-3}$$

**Bấm MODE 5 rồi bấm 2 để giải hệ 3 ẩn a,b,c gồm 3 PT trên.Ta được a=1;b=1;c=1**

**Như vậy biểu thức thứ nhất cần tìm là** $x^2+x+1-\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}$

**Tương tự biểu thức thứ hai cần tìm là** $2x^2+1-\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}$

$$PT(1)\Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}$$
$$+2x^2+1-\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}+x^4-2x^3-4x^2+4x+4=0$$

$\Leftrightarrow (x^4-2x^3-4x^2+4x+4)P(x)=0(2)$ **với**

$$P(x)=\frac{1}{x^2+x+1+\sqrt{4x^3+7x^2-2x-3}}+\frac{3}{2x^2+1+\sqrt{x^4+6x^3+16x^2-12x-11}}+1>0$$

**Suy ra** $PT(2) \Leftrightarrow x^4-2x^3-4x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x^2-2x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn

**Vậy PT đã cho có 4 nghiệm** $x=1\pm\sqrt{3}$ **;** $x=\pm\sqrt{2}$

**Chú ý: Do** $A+C=2$ **;** $AC=-2$ **nên PT có nhân tử là** $x^2-2x-2$

**Mở rộng dạng toán: Nếu a,b,c hoặc nghiệm PT là các số hữu tỉ thì ta đưa về tìm các biểu thức dạng** $n\sqrt[k]{P(x)}-(px^2+qx+r)$ **,với p,q,r là số nguyên và n là số nguyên dương ta tìm được hoặc ta thử chọn. Vấn đề nữa đặt ra là liệu có phương trình mà ta phải tìm biểu thức dạng phức tạp hơn chẳng hạn như** $\sqrt[k]{P(x)}-(ax^3+bx^2+cx+d)$ **.Hãy làm bài tập dưới đây các bạn sẽ rõ**

**Bài tập** Giải phương trình

1) $\dfrac{4x^4-13x^2+2x}{2+\sqrt{4x^3+16x^2-x+2}}=1$

2) $\dfrac{x^4-7x^3-3-3\sqrt{x^3+9x^2-6}}{x^2-3x+3}=-3$

3) $\dfrac{2x^4-x^3+3x^2-5x-8}{(x^2-x+1)\sqrt{4x^2+3x+14}}=1$

4) $\dfrac{\sqrt{3x^4-2x^3+4x^2+4}+\sqrt{3x^2+2x+4}}{3x^2+x+2}=1$

5) $\dfrac{3\sqrt{16x^4-12x^3+4x^2+24x-23}-2x}{2\sqrt{3x^4+7x^2-14x+13}+1}=1$

6) $\dfrac{2x+2+\sqrt[3]{8x^6-12x^5+4x^4+1}}{1+\sqrt{12x^4+5x^2+2x-3}}=1$

7) $\dfrac{3-2x+\sqrt[3]{x^6+3x^5+5x-1}}{2+\sqrt{4x^4-x^3+3x^2-7x+2}}=1$

8) $\dfrac{x^4-2x^3+6-\sqrt{4x^3+27x^2+6x+3}}{20x^2+x+1+\sqrt{2x^3+26x^2+2x+3}}=1$

9) $\dfrac{2x^3-4x^2+6x+\sqrt{x^4+10x^2-4x-3}}{3+(x^2+2)\sqrt[3]{2x^4+5x^3-12x^2+6x}}=1$

10) $\dfrac{18x^2+12-3\sqrt{20x^3+9x^2+30x-20}}{x^2-\dfrac{5}{2}x+4+\sqrt{7x^3+3x^2+8x-5}}=2$

11) $\dfrac{(x^3-2x)\sqrt{5x^5+7x^4+4x^3-4x^2-3x+7}}{3x^5+x^4-x^3-8x^2-5x+6}=1$

12) $\dfrac{7x^3+8x+\sqrt{3x^4+21x^3-15x^2+27x-5}}{2x^4+14x^2+6-\sqrt{2x^4+11x^3-4x^2+11x-2}}=1$

13) $\dfrac{\sqrt{(28x^2+29x+11)\sqrt{x}-43x^2-4x-5}-4x\sqrt{x}}{4x+1-\sqrt{(36x^2+25x+11)\sqrt{x}-35x^2-6x-6}}=1$

14) $\sqrt{21x^6+19x^5-13x^4-9x^3+5x^2-4x-3}=$
$4x^8+4x^7-20x^6-19x^5+19x^4+12x^3-5x^2+4x+5$

# Chuyên đề 5

## PHƯƠNG PHÁP CỘNG DÙNG TRONG THỦ THUẬT MÁY TÍNH CẦM TAY TRỢ GIÚP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

*Vũ Hồng Phong GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*

**Điều kiện sử dụng phương pháp: Bấm máy tính tìm được ít nhất 2 nghiệm A,B phân biệt**

**Nếu PT có chứa** $\sqrt{P(x)}$ **thì giả sử biểu thức cần xuất hiện có dạng:** $ax^2+bx+c-\sqrt{P(x)}$ **,trong đó a,b,c là các số nguyên .Do A,B là nghiệm của biểu thức nên**

$aA^2+bA+c-\sqrt{P(A)}=0(*)$

$aB^2+bB+c-\sqrt{P(B)}=0$

**Chú ý: Nếu B là nghiệm ngoại lai ta có** $aB^2+bB+c+\sqrt{P(B)}=0$ **(các bạn tự xử lí TH này)**

**Trừ vế với vế ta được:**

$a(A-B)(A+B)+b(A-B)=\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}$

**Suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$

**Trường hợp 1:** $A+B=0$ **thì** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$

**Nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$ **bấm = máy hiện giá trị của b cần tìm**

**Từ (*) suy ra** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$

**Ta tìm a,c bằng máy tính như sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\sqrt{P(A)}-XA^2-bA$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta chỉ lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên**

**Suy ra a=X,c=F(X)**

**Trường hợp 2:** $A+B\neq 0$

**Do** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b bằng máy tính như sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên**

**Từ đó suy ra a=X,b=F(X)**

**Từ PT(*) ta tìm** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-aA^2-bA$ **bấm = máy hiện giá trị của c cần tìm**

**Sau đây là các thí dụ.**

**Thí dụ 1 Giải phương trình**

$$\frac{x^6+\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}}{3x^4+12x^2-x+10}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$\sqrt{P(x)}+x^6-3x^4-12x^2+x-10=0(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}$

**Nhập biểu thức vế trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm** $X=2{,}25992105$

**Bấm nút mũi tên sang trái để quay lại VT(1) ta bấm = để lưu VT(1)**

**Bấm ALPHA X SHIFT STO A để lưu nghiệm vào A**

**Bấm nút mũi tên đi lên để về VT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE**

**Máy hỏi Solve for X ta bấm -10 = máy cho ta nghiệm** $X=-2{,}25992105$

**Bấm SHIFT STO B**

**Bấm máy A+B máy hiện 0 suy ra** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$

**Nhập biểu thức** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}$ **bấm = máy hiện -1. Vậy b=-1**

**Do b= -1 nên** $c=\sqrt{P(A)}-aA^2-(-1)A=\sqrt{P(A)}-aA^2+A$

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\sqrt{P(A)}-A^2X+A$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy khi X=3 thì F(X)=1 nguyên**

**Suy ra a=3,c=1**

**Biểu thức cần tìm là:** $\sqrt{x^6+6x^4-6x^3-2x^2-2x-8}-(3x^2-x+1)$

**PT(1) trở thành** $\sqrt{P(x)}-(3x^2-x+1)+x^6-3x^4-9x^2-9=0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x)-(3x^2-x+1)^2}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6-3x^4-9x^2-9}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow [\frac{1}{\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1}+1](x^6-3x^4-9x^2-9)=0$$

$$\Leftrightarrow x^6-3x^4-9x^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+3x)^2-(3x^2+3)^2=0 \Leftrightarrow (x^3+3x^2+3x+3)(x^3-3x^2+3x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)^3+2\right)\left((x-1)^3-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)^3=-2\\(x-1)^3=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm(1+\sqrt[3]{2})$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=\pm(1+\sqrt[3]{2})$

**Thí dụ 2 Giải phương trình**

$$\frac{4x^2-x+4-\sqrt{2x^6+4x^4+7x^3+5x^2+2x-1}}{x^2+\sqrt{2x^6+x^4-x^3+10x^2-12x+7}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}=3x^2-x+4(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{2x^6+x^4-x^3+10x^2-12x+7}$

$\sqrt{Q(x)}=\sqrt{2x^6+4x^4+7x^3+5x^2+2x-1}$

Tìm và lưu các nghiệm như thí dụ 1 ta được 2 nghiệm là

$A=0,793700526$ ; $B=-1,25992105$

**Ta có** $A+B=-0,4662205239\neq 0$

**Có** $b=\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b như sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập** $\dfrac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy F(X)=-2 khi X=1**

**Suy ra a=1,b= -2. Khi này** $c=\sqrt{P(A)}-A^2+2A$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-A^2+2A$ **bấm = máy hiện số 3**

**Ta được c=3**

**Biểu thức cần tìm là** $\sqrt{P(x)}-(x^2-2x+3)$

**Tương tự biểu thức nữa cần tìm là** $\sqrt{Q(x)}-(2x^2+x+1)$

**PT(1) trở thành** $\sqrt{P(x)}-(x^2-2x+3)+\sqrt{Q(x)}-(2x^2+x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x)-(x^2-2x+3)^2}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{Q(x)-(2x^2+x+1)^2}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^6+3x^3-2}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{2x^6+3x^3-2}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(2x^3-1)[\frac{1}{\sqrt{P(x)}+x^2-2x+3}+\frac{1}{\sqrt{Q(x)}+2x^2+x+1}]=0$$

$\Leftrightarrow (x^3+2)(2x^3-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$ **Vậy phương trình có 2 nghiệm** $x=-\sqrt[3]{2}$ **;** $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

**Vấn đề đặt ra là liệu với một biểu thức** $\sqrt{P(x)}$ **có khi nào có nhiều lựa chọn biểu thức dạng** $ax^2+bx+c-\sqrt{P(x)}$ **hay không.Ví dụ sau sẽ làm sáng tỏ điều này**

**Thí dụ 3 Giải phương trình**

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-2x-3}{\sqrt{12x^3+24x^2+4x+6}+\sqrt{12x^3+51x^2+6}}=1$$

**Lời giải**

**Phương trình đã cho tương đương với PT:**

$x^4-2x^3+x^2-2x-3-\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=0(1)$

**Với** $\sqrt{P(x)}=\sqrt{12x^3+24x^2+4x+6}$ **và** $\sqrt{Q(x)}=\sqrt{12x^3+51x^2+6}$

**Tìm và lưu các nghiệm ta được 2 nghiệm là**

$A=3{,}449489743$ ; $B=-1{,}449489743$

**Bấm máy tính có** $A+B=2\neq 0$ **;** $AB=-5$

**(Theo Định lí Vi-ét thì PT sẽ có nhân tử là** $x^2-2x-5$**)**

**Có** $b=\frac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)a$ **nên ta tìm a,b như sau:**

**Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức** $\frac{\sqrt{P(A)}-\sqrt{P(B)}}{A-B}-(A+B)X$ **bấm =**

**Máy hiện Start? Ta bấm** $-9$ **=**

**Máy hiện End? Ta bấm 9 =**

**Máy hiện Step? Ta bấm 1 =**

**Quan sát bảng ta thấy tất cả các giá trị F(X) đều nguyên. Vì thế ta chọn 1 cặp là X=2;F(X)= 1. Suy ra a=2,b=1**$\Rightarrow c=\sqrt{P(A)}-2A^2-A$

**Nhập biểu thức** $\sqrt{P(A)}-2A^2-A$ **bấm = máy hiện số 1.Ta được c=1**

**Suy ra** $2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}$ **là biểu thức cần tìm**

**Tương tự ta chọn được** $3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}$ **là biểu thức cần tìm**

**Phương trình(1) tương đương với PT:**

$$2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}+x^4-2x^3-4x^2-2x-5=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1-\sqrt{P(x)}+3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}+(x^2-2x-5)(x^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-5)\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x+1+\sqrt{P(x)}}+\frac{9x^2+1}{3x^2-x+1+\sqrt{Q(x)}}+x^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-5=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$$

**Vậy phương trình có 2 nghiệm** $x=1\pm\sqrt{6}$

**Chọn cặp biểu thức khác chẳng hạn** $x^2+3x+6-\sqrt{P(x)}$ **;** $3x^2-x+1-\sqrt{Q(x)}$ **ta cũng giải được PT theo cách nhân liên hợp**

**Chú ý:**

**+Việc chọn biểu thức trong thí dụ 3 là tùy ý hay cần chọn hợp lí để ta dùng được cách nhân liên hợp. Xin dành cho mọi người tìm hiểu điều này.**

**+ Một số phương trình ta có thể tìm biểu thức phức tạp hơn chẳng hạn** $\sqrt{P(x)}-(ax^3+bx^2+cx+d)$ **và có thể giải quyết theo cách bài viết đã nêu khi điều kiện về nghiệm của PT ta tìm được nhiều hơn(kể cả nghiệm ngoại lai hay nghiệm bội)**

**Bài tập Giải phương trình**

1) $\dfrac{3x^3+\sqrt{24x^3+4x^2+9x-1}}{x^4+8x^2-9x+9}=1$

2) $\dfrac{9x^6+9x^3+5x^2-5}{x^2+\sqrt{9x^6+x^4+12x^3+7x^2-4}}=3x^3$

3) $\dfrac{4x^3+4x+\sqrt{18x^3+4x^2+12x+2}}{3x^4+10x^2+4-\sqrt{6x^3-2x^2+6x-1}}=1$

4) $\dfrac{4x^4+7x^2-3-\sqrt{6x^3+16x^2+9x+6}}{x^2-5x+20+\sqrt{16x^3+49x^2+26x+21}}=1$

5) $\dfrac{4x^2-x+5-\sqrt{x^6-4x^3+6x^2-12x+5}}{x^2+1+\sqrt{4x^6+4x^3-11x^2+2x-15}}=1$

6) $\dfrac{4x^2-3x+3-\sqrt{x^6+x^4+8x^2-8x-17}}{x^2+\sqrt{x^6+4x^4+5x^2-2x-20}}=1$

7) $\dfrac{2x^6+8x^4-4x^2+x-14}{1+\sqrt{4x^6+7x^4-2x^3-3x^2-2x-8}}=-1$

8) $\dfrac{3x^2-3x+4-\sqrt{x^6+x^4+8x^2-8x+8}}{1+\sqrt{x^6+4x^4+5x^2-2x+5}}=1$

9) $\dfrac{x^6-3x^5+24x^4+2x^2-8x+2}{5+\sqrt{x^6+33x^4-4x^3+8x^2-8x+3}}=x^3$

10) $\dfrac{3x^2+3x+6-\sqrt{x^8+4x^5+x^4+12x^2+16x}}{1+\sqrt{x^8+4x^5+4x^4+5x^2+2x-15}}=1$

11) $\dfrac{x^7+2x^5-6x^4+18x^3+4x-16}{\sqrt{x^7+4x^5-7x^4+18x^3+3x^2+2x-15}}=2x^3$

12) $\dfrac{-6x^7-15x^6-18x^5-9x^4+11x^2+x+1}{x^8+\sqrt{x^6+6x^5+19x^4+22x^3+14x^2+2x-8}}=1$

Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự, Hoàn Sơn,Tiên Du, Bắc Ninh ( Hoàn thành 28-5-2016)



Vũ Hồng Phong Thôn Bất Lự,Hoàn Sơn,Tiên Du,Bắc Ninh

ToánBK35 ĐHSP Thái Nguyên

